Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

99) Allgemeines Mehrpunktproblem

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

tragen. Orthogonal gehen durch die Schar der neuen Niveauflächen die Kraftlinien. Die Kraftröhren des kombinierten Problems können aus denen der Einzelprobleme ebenfalls durch Diagonalschnitte abgeleitet werden.

Damit ist ein Fundament geometrischer Art für die Potentialtheorie gefunden, welches gewissermafsen Infinitesimalgeometrie an Stelle der Infinitesimalrechnung setzt und den Vorzug der Anschaulichkeit hat.

Es sei bemerkt, dafs man auf diese Weise auch Probleme kombinieren kann, bei denen es sich um massenbelegte Linien oder Flächen oder Körper handelt, auch könnten Punkte, Linien, Flächen und Körper gemischt auftreten. Man hat nur darauf zu achten, dafs die arithmetischen Reihen für c in beiden Einzelproblemen jedesmal dieselbe Differenz haben. Allerdings mufs darauf geachtet werden, dafs bei der Annäherung der zweiten Gruppe an die erste die Massenverteilungen bleiben, wie sie sind. Bei elektrostatischen Problemen ist dies nicht der Fall, denn die Influenzwirkungen geben eine ganz neue Anordnung. Erst wenn man die der neuen Anordnung entsprechenden Niveauflächen kennt, kann man aus ihnen die des kombinierten Problems ableiten. Beispiele werden unten zur Darstellung kommen.

99) Allgemeines Mehrpunktproblem. Hat man die Massen m_1, m_2 und m_3 in beliebigen Raumpunkten, wobei sämtliche positiv, oder einige positiv und der Rest negativ sein können [wir wollen der Einfachheit halber stets die Summe der positiven als gröfser, als die absolut genommene Summe der negativen annehmen (was der Allgemeinheit nicht schadet), oder im Grenzfalle die algebraische Gesamtsumme gleich Null setzen], so ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} = c.$$

Die Konstruktion geschieht so, dafs man aus $\frac{m_1}{r_1} = c_1$ und $\frac{m_2}{r_2} = c_2$ durch Addition im obigen Sinne zunächst die Flächen $\frac{m_1}{r_2} + \frac{m_2}{r_2} = k$ bildet, wobei man k die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe annehmen läfst. Darauf läfst man in $\frac{m_3}{r_3} = c_3$ die Konstante c_3 dieselben Werte oder die der Glieder einer Reihe derselben Differenz annehmen und findet nach vorigem Abschnitt geometrisch die gesuchten Flächen. Diese werden von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt.

Ist die Summe der Massen verschieden von Null, dann giebt es im Endlichen einen Schwerpunkt S. Zu den Niveauflächen gehört dann eine unendlich grofse Kugel mit S als Centrum. Sämtliche oder ein Teil der Kraftlinien gehen bis zu dieser Kugel, je nachdem alle Massen positiv, oder diese teils positiv, teils negativ sind. Die Asymptoten gehen von S aus. Teilt man diese Kugel irgendwie in gleiche Flächen ein, so geben die in ihren Rändern endenden Kraftlinien potentiell gleichwertige Kraftröhren. Dadurch wird in dem Falle lauter positiver Massen der Gesamtraum gleichwertig eingeteilt, im Falle gemischter Vorzeichen wenigstens ein Teil des Raumes.

Ist die Summe der Massen gleich Null, so liegt S in unendlich grofser Entfernung, zu den Niveauflächen gehört dann im allgemeinen keine unendlich grofse Kugel und ebensowenig sind Asymptoten vorhanden.

Die besprochene Einteilung der unendlich grofsen Kugel in gleiche Flächen kann durch Meridiane und Parallelkreise in bekannter Weise erfolgen, da man aber die Pole auf der Kugel beliebig wählen kann (nur müssen sie einander entgegengesetzt sein), so sieht man, dafs man unendliche Mannigfaltigkeit in der Einteilung des Raums erhalten kann. Am einfachsten wird es allerdings sein, sich gewissen Koordinatensystemen anzubequemen, wobei die Gleichungen die einfachste Gestalt annehmen.

100) Anordnung auf gerader Linie. Die einfachsten Fälle erhält man bei der Anordnung sämtlicher Massen auf gerader Linie, weil dann die Niveauflächen Drehungsflächen werden. Die Gleichungen des Problems sind dann für die Niveauflächen

$$1)\qquad \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n} = c,$$

für die Kraftlinien in jeder Meridianebene

$$2)\qquad m_1 \cos\vartheta_1 + m_2 \cos\vartheta_2 + \cdots + m_n \cos\vartheta_n = c_1,$$

Meridianschnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, besorgen das übrige, während sowohl c als auch c_1 arithmetischen Reihen zu folgen haben.

Handelt es sich z. B. um Punkte M_1, M_2, M_3 auf gerader Linie mit Ladungen -3, $+2$, $+1$ (so dafs die Summe Null ist, was die asymptotische Gruppe entfernt und das Skizzieren erleichtert), so bestehen die Gleichungen:

$$-\frac{3}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} = c$$

$$-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_3 = c.$$

In Fig. 78 ist das Feld in seiner Gestaltung skizziert. Man verfolge den Gang der Pfeile und der Niveaukurven. Die Schraffierung