Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

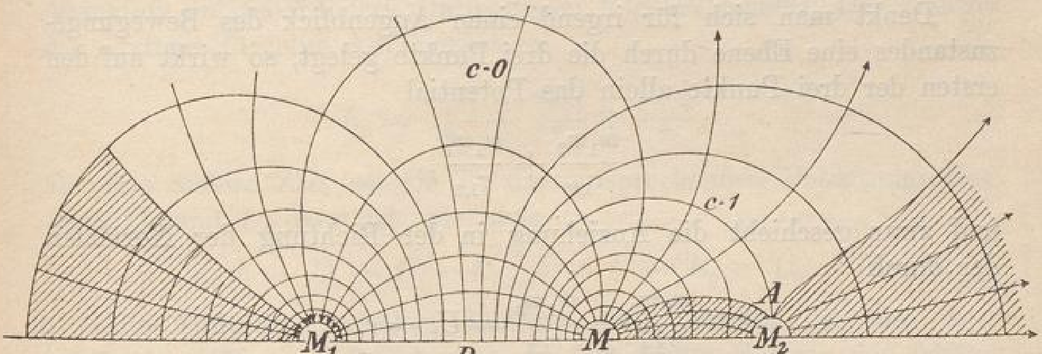
Leipzig, 1898

102) Vom Problem der drei Körper und seiner Verallgemeinerung

zeigt an, daſs ein Teil der von M_2 ausgehenden Stromlinien nicht unmittelbar nach M_1 gelangen kann, sondern nach M_3 geht, daſs dagegen von M_3 aus auf sehr groſsem Wege der Übergang nach M_1 erfolgt. Mit Ausnahme der X-Achse und einer Niveaulinie DE zwischen M_1 und M_3 gelangt keine der Kurven in den unendlichen Bereich.

Entsprechendes geschieht bei beliebig vielen Punkten auf gerader Linie. Dreht man um die X-Achse und führt Meridianschnitte, so erhält man die Zelleneinteilung des elektrostatischen Feldes für jeden der einzelnen Fälle.

Fig. 78.



Die Hauptsache ist, daſs die Anzahl der Kraftlinien für die einzelnen Punkte proportional den elektrischen Massen ist, daſs, wenn die Summe der elektrischen Massen verschieden von Null ist, der Überschuſs der Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche geht, daſs dann Asymptoten vorhanden sind, die durch den Schwerpunkt S gehen, und daſs diese die unendliche Kugel um S in gleiche Zonen einteilen, so daſs die Cosinus ihrer Neigungswinkel eine arithmetische Reihe bilden, die von 0 bis ± 1 geht.

101) Anordnung in der Ebene. Liegen die sämtlichen Punkte in einer Ebene beliebig zerstreut, so gilt Gleichung 1 wie vorher ganz allgemein, Gleichung 2 aber nur für die Ebene, nicht für den Raum, da die Flächen nicht mehr Drehungsflächen sind. Sind sämtliche Massen positiv, so gelingt mit Hilfe der um den Schwerpunkt gelegten unendlichen Kugel die Einteilung ohne Schwierigkeiten. Hier läſst sich Einblick in ein wichtiges Problem der Mechanik nehmen.

102) Vom Problem der drei Körper und seiner Verallgemeinerung. Die vorhergehenden Betrachtungen geben einigen Einblick in das noch nicht vollständig gelöste Problem der drei Körper. Es wird angenommen, diese befänden sich allein im Welt-

raume und ihre gegenseitige Anziehung folge dem Newtonschen Gesetze. Dann finden folgende gegenseitigen Anziehungen statt:

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}, \quad \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}^2}, \quad \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}^2}.$$

Diesen entspricht als Gesamtpotential

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}},$$

worin $r_{1,2}$, $r_{2,3}$, $r_{3,1}$ die möglichen Verbindungslinien sind. Bei n Punkten handelt es sich um Kombinationen zu je zweien.

Denkt man sich für irgend einen Augenblick des Bewegungszustandes eine Ebene durch die drei Punkte gelegt, so wirkt auf den ersten der drei Punkte allein das Potential

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}},$$

und zwar geschieht die Anziehung in der Richtung der Normalen der durch

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} = U_1 = c_1$$

dargestellten Niveaulinie, wo $U_1 = c_1$ der augenblickliche Potentialwert ist, oder in der Tangente der durch

$$m_1 m_2 \cos \vartheta_{1,2} + m_1 m_3 \cos \vartheta_{1,3} = \gamma_1$$

dargestellten Kraftlinie, wo die ϑ die Neigungswinkel der beiden Verbindungslinien gegen die Gerade $r_{2,3}$ bezw. ihre Verlängerung bedeuten. Die auf jeden der Punkte augenblicklich wirkende Kraft ist also nach Gröfse und Richtung leicht zu bestimmen, sowohl geometrisch als auch arithmetisch (siehe oben).

Da die Wirkung und die Gegenwirkung für je zwei der Punkte übereinstimmen, ist die Summe der Kräfte in jedem Augenblick gleich Null. Denkt man sich also die Gesamtmasse $m_1 + m_2 + m_3$ im Schwerpunkte angebracht, so ist die auf sie einwirkende Kraft gleich Null. Folglich: Der Schwerpunkt ändert seinen augenblicklichen Bewegungszustand nicht, seine Bewegung ist konstant nach Richtung und Geschwindigkeit.

Kennt man also die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 der drei Punkte für einen Augenblick, so kennt man die Bewegung des Schwerpunktes für alle Zeit. Um sie zu bestimmen, hat man nur nötig, an der im Schwerpunkte gedachten Gesamtmasse die reduzierten Geschwindigkeiten

$$V_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_2 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_3 = \frac{m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

anzubringen und sie zu vereinigen. Die „Bewegungsquantitäten" sind dann dieselben.

Da diese Verschiebung des Systems nebensächlich ist, kann man sich auf den Fall beschränken, wo die Summe der Geschwindigkeiten gleich Null ist. In den Schwerpunkt verlegt man dann zweckmäfsig den Anfangspunkt des Koordinatensystems, was einige Vereinfachungen bietet. Diese Eigenschaft, die sich auch auf den Fall von n Körpern ausdehnen läfst, nennt man das Schwerpunktsprinzip.

Eine zweite Eigenschaft des Bewegungszustandes ergiebt sich im Anschlufs an die früheren Darlegungen folgendermafsen: Die Energie des Systems für eine Anfangszeit sei

$$E_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2},$$

für eine andere Zeit sei sie E, die entsprechenden Potentialgröfsen seien U_0 und U, dann ist, wie oben,

$$E - E_0 = U - U_0, \quad E - U = E_0 - U_0.$$

Die Differenz zwischen Energie und Potential ist also eine konstante Gröfse. Definiert man die potentielle Energie wie früher, so handelt es sich um einen immerwährenden Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie. Da nichts verloren geht, spricht man von der Erhaltung der Arbeit. Das Gesagte läfst sich auf n Punkte ausdehnen, nur ist stets die Bedingung zu stellen, dafs unelastische Stöfse nicht vorkommen.

In dem Gesetz der Erhaltung der Arbeit (Energie) liegt also eine zweite Eigenschaft der Bewegung der drei bezw. der n Körper.

[Eine dritte Eigenschaft soll nur beiläufig erläutert, nicht aber bewiesen werden: das Flächenprinzip. Man denke sich die Bewegungen auf eine der Koordinatenebenen projiziert. Verbindet man nun den Anfangs- und den Endpunkt jedes der drei Wege für eine beliebig gewählte Zeiteinheit, z. B. für die Sekunde, mit dem Nullpunkte des Koordinatensystems, so erhält man drei Sektoren mit den Flächeninhalten F_1, F_2 und F_3. Zu welcher Zeit man nun die Gröfse $F_1 + F_2 + F_3$ messen mag, jederzeit ist sie dieselbe. Also: Zu gleichen Zeiträumen gehören gleiche Summen der Flächenräume. (Die Vektoren zusammengenommen legen in gleichen Zeiten gleiche Summen von Sektoren zurück.)

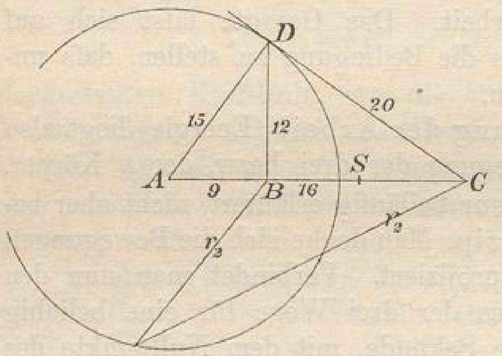
Diese konstante Summe hat verschiedene Werte für verschieden gerichtete Projektionsebenen. Für eine derselben hat sie einen gröfsten Wert. Laplace hat bewiesen, dafs die Lage dieser letzteren Ebene für alle Zeiten dieselbe ist, daſs also ihre Schnittwinkel mit den Koordinatenebenen konstant sind, vorausgesetzt, daſs keine Stöſse vorkommen. Er bezeichnete diese Ebene als die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Die Unveränderlichkeit der Lage folgt daraus, daſs der andern Lage nicht diese, sondern eine andere Summe von Sektoren zukommen würde.]

Obwohl man somit drei wichtige Eigenschaften des Bewegungszustandes dreier Körper und auſserdem für jede gegebene Lage die Gröſse und Richtung der augenblicklich wirkenden Kräfte kennt, ist man doch noch nicht zu einer geschlossenen Lösung des Problems gelangt. Für das System von Sonne, Mond und Erde hat man mit Hilfe der Störungstheorie befriedigende Ergebnisse gefunden, für deren Entwickelung aber elementare Hilfsmittel nicht ausreichen.*)

Die Verallgemeinerungen für n Körper lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Das Schwerpunktsprinzip, das Prinzip der lebendigen Kraft und das Flächenprinzip mit der berühmten Laplaceschen Folgerung bleiben dabei bestehen. Auf diesem Wege wurde der von Newton angebahnten Himmelsmechanik durch Laplace ein bedeutungsvoller Fortschritt verschafft.

103) Beispiel mit Kreisen bezw. Kugeln. In Maxwells Lehrbuche der Elektrizität und des Magnetismus befinden sich einige nach den angegebenen Prinzipien exakt gezeichnete Figuren. Auf Tafel V z. B. ist der Fall $A = 15$, $B = -12$, $C = 20$ behandelt, wobei $AB = 9$, $BC = 16$ ist. Der Fall ist von besonderem Interesse. Da die in Figur 80 wiedergegebene Zeichnung bei Maxwell nur beschrieben wird, die betreffenden Berechnungen und Beweise aber dem Leser überlassen werden, sei das interessante Beispiel hier ausführlicher behandelt.

Fig. 79.



Man denke sich über AC in Fig. 79 einen Halbkreis geschlagen und in B auf AC das Lot BD errichtet. Dies giebt ein rechtwinkliges

*) B. G. Airy hat allerdings in dem Werke: Gravitation; an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system, London 1834, einen solchen Versuch gemacht. Im Programm 1894/95 des Realgymnasiums zu Borna ist ein Teil davon frei bearbeitet. Auſserdem werden dort Übersetzungen von Littrow und Hoffmann genannt.