Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

103) Beispiel mit Kreisen bzw. Kugeln

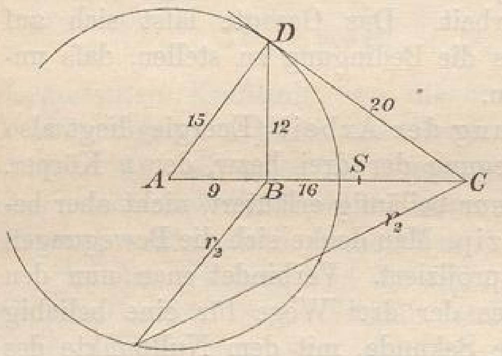
für alle Zeiten dieselbe ist, dafs also ihre Schnittwinkel mit den Koordinatenebenen konstant sind, vorausgesetzt, dafs keine Stöfse vorkommen. Er bezeichnete diese Ebene als die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Die Unveränderlichkeit der Lage folgt daraus, dafs der andern Lage nicht diese, sondern eine andere Summe von Sektoren zukommen würde.]

Obwohl man somit drei wichtige Eigenschaften des Bewegungszustandes dreier Körper und aufserdem für jede gegebene Lage die Gröfse und Richtung der augenblicklich wirkenden Kräfte kennt, ist man doch noch nicht zu einer geschlossenen Lösung des Problems gelangt. Für das System von Sonne, Mond und Erde hat man mit Hilfe der Störungstheorie befriedigende Ergebnisse gefunden, für deren Entwickelung aber elementare Hilfsmittel nicht ausreichen.*)

Die Verallgemeinerungen für n Körper lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Das Schwerpunktsprinzip, das Prinzip der lebendigen Kraft und das Flächenprinzip mit der berühmten Laplaceschen Folgerung bleiben dabei bestehen. Auf diesem Wege wurde der von Newton angebahnten Himmelsmechanik durch Laplace ein bedeutungsvoller Fortschritt verschafft.

103) Beispiel mit Kreisen bezw. Kugeln. In Maxwells Lehrbuche der Elektrizität und des Magnetismus befinden sich einige nach den angegebenen Prinzipien exakt gezeichnete Figuren. Auf Tafel V z. B. ist der Fall $A = 15$, $B = -12$, $C = 20$ behandelt, wobei $AB = 9$, $BC = 16$ ist. Der Fall ist von besonderem Interesse. Da die in Figur 80 wiedergegebene Zeichnung bei Maxwell nur beschrieben wird, die betreffenden Berechnungen und Beweise aber dem Leser überlassen werden, sei das interessante Beispiel hier ausführlicher behandelt.

Fig. 79.



Man denke sich über AC in Fig. 79 einen Halbkreis geschlagen und in B auf AC das Lot BD errichtet. Dies giebt ein rechtwinkliges

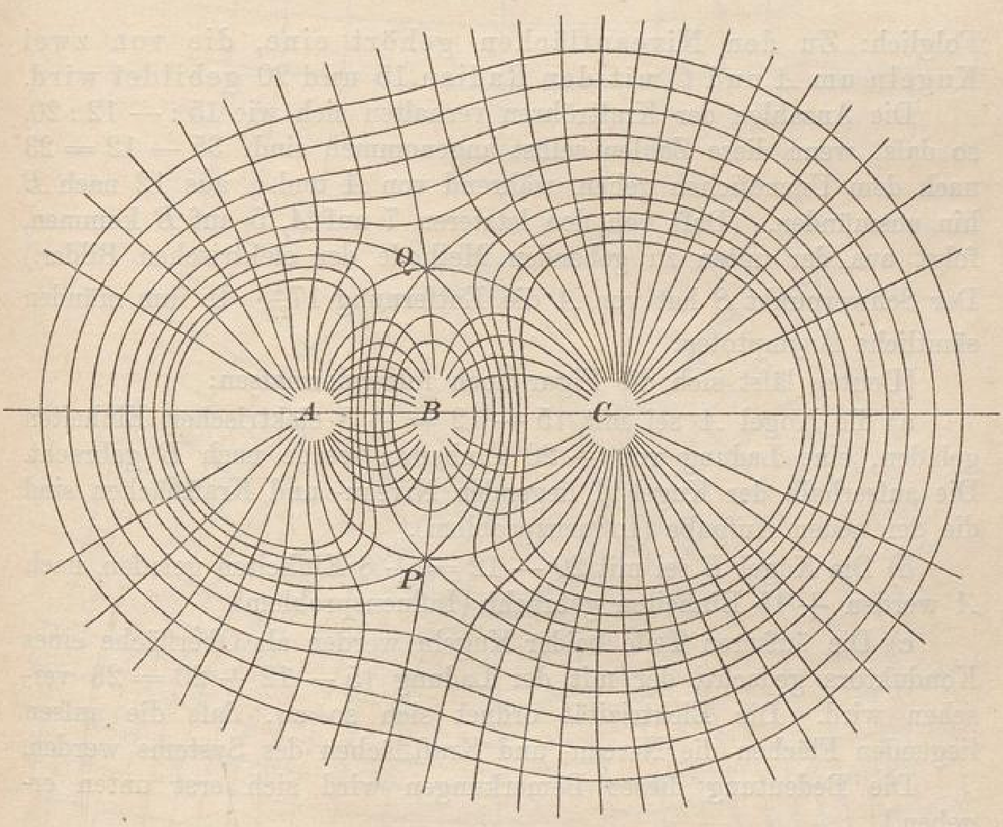
*) B. G. Airy hat allerdings in dem Werke: Gravitation; an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system, London 1834, einen solchen Versuch gemacht. Im Programm 1894/95 des Realgymnasiums zu Borna ist ein Teil davon frei bearbeitet. Aufserdem werden dort Übersetzungen von Littrow und Hoffmann genannt.

Dreieck ACD mit $AD = 15$, $CD = 20$, $BD = 12$. Denkt man sich um A mit $AD = 15$ einen Kreis geschlagen, so ist

$$AB \cdot AC = 9 \cdot 25 = 15^2 = AD^2,$$

d. h. B ist der reciproke Punkt von C.

Fig. 80.



Der Potentialwert für jeden Punkt der Ebene ist $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3}$. Für die Punkte des um A geschlagenen Kreises handelt es sich um $1 - \frac{12}{r^2} + \frac{20}{r_3}$. Nun ist aber nach bekanntem Satze (Method. Lehrbuch II 62) für jeden Punkt dieses Kreises

$$BE : CE = 12 : 20 = 3 : 5, \quad \text{also} \quad r_3 = \tfrac{5}{3} r_2,$$

also ist für jeden Punkt des Kreises der Potentialwert

$$1 - \frac{12}{r_2} + 20 \cdot \frac{3}{5 r_2} = 1.$$

Die um A mit dem Radius 15 gelegte Kugel ist also der Ort für das konstante Potential 1*).

Für die um C mit Radius 12 gelegte Kugel handelt es sich um das Potential $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + 1$. Dabei ist überall $r_1 : r_2 = 15 : 12 = 5 : 4$, also das Potential

$$\frac{15}{r_1} - \frac{12 \cdot 5}{4 \cdot r_1} + 1 = 1.$$

Folglich: Zu den Niveauflächen gehört eine, die von zwei Kugeln um A und C mit den Radien 15 und 20 gebildet wird.

Die Anzahlen der Kraftröhren verhalten sich wie 15 : — 12 : 20, so dafs, wenn diese Zahlen selbst angenommen sind, 35 — 12 = 23 nach dem Unendlichen gehen, während von A und C aus 12 nach B hin ausmünden. (Dafs von den letzteren 7 auf A, 5 auf B kommen, folgt aus der unten zu gebenden Methode der elektrischen Bilder.) Der Schwerpunkt S hat von A die Entfernung $17\frac{1}{23}$. In ihm münden sämtliche Asymptoten.

[Deuten läfst sich die Figur noch folgendermafsen:

a) die Kugel A sei mit 15 — 12 = + 3 elektrischen Einheiten geladen, eine Ladung von + 20 Einheiten werde nach B gebracht. Die aufserhalb der Kugel A liegenden Niveau- und Kraftflächen sind die der neuen Aufgabe (Influenzproblem).

b) Die Kugel B sei mit 20 — 12 = + 8 Einheiten geladen, nach A werden + 15 Einheiten gebracht (Influenzproblem).

c) Die äufseren Teile beider Kugeln werden als Oberfläche eines Konduktors gedacht, der mit der Ladung 15 — 12 + 20 = 23 versehen wird. Die Elektrizität ordnet sich so an, dafs die aufsen liegenden Flächen die Niveau- und Kraftflächen des Systems werden.

Die Bedeutung dieser Bemerkungen wird sich erst unten ergeben.]

104) Geladener Konduktor im homogenen Felde. Denkt man sich bei dem symmetrischen Zweipunktsystem ungleichartiger Elektrizitäten die Punkte M_1 und M_2 unendlich fern voneinander, so erhält man in der Umgebung von M ein sogenanntes homogenes Feld, bei dem das Netz der Kraft- und Niveaulinien quadratisch wird. Legt man in die eine Parallelenschar die Kraftlinien des Einpunktproblems, in die andere dessen Niveaulinien, so geben die Diagonalkurven das in Fig. 81 dargestellte Netz, welches ebenfalls dem Maxwellschen Lehrbuch entnommen ist.

---

*) Bei Maxwell-Weinstein steht irrtümlich Null.