



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel VI. Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen.

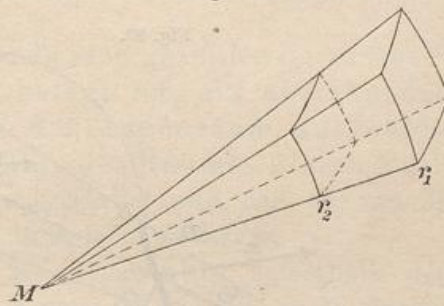
[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Kapitel VI.

Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen.

105) Begriff der Spannung. In dem festen Punkte M befindet sich die anziehende Masse 1, deren Niveauflächen konzentrische Kugeln sind, während Kugelflächen und Meridianschnitte die Zelleneinteilung des Raums vollenden. Eine solche Zelle ist in der Figur dargestellt.

Fig. 82.



Man denke sich ihre Wände homogen mit Masse belegt, z. B. so, daß auf jeder Flächeneinheit die Masse 1, also auf jeder Fläche F die Masse F angebracht ist. Diese Massenbelegungen werden vom Massenpunkte M angezogen. Es soll untersucht werden, ob die angezogenen Belegungen auf den Innenraum der Zelle einen gewissen Druck oder Zug ausüben, indem sie ihn verkleinern oder vergrößern wollen, ob also der Raum unter einer gewissen Spannung steht.

Bezeichnet man die konzentrischen Kugelflächen der Zelle als Grundflächen, die übrigen als Seitenflächen, so läßt sich folgendes sagen. Die Belegungen der Seitenflächen werden lediglich nach M hingezogen, die an den einzelnen Teilchen wirkenden Kräfte liegen also in den Flächen selbst und haben keine Komponenten, die den Innenraum vergrößern oder verkleinern könnten. Anders ist es bei den Grundflächen F_1 und F_2 , die um r_1 bzw. r_2 von M entfernt sind. Die eine übt auf den Innenraum einen Druck $\frac{F_1}{r_1^2}$ aus, der als eine positive Spannung bezeichnet werden soll, der zweite einen Zug $\frac{F_2}{r_2^2}$, der als negative Spannung gelten soll. Die eine Kraft

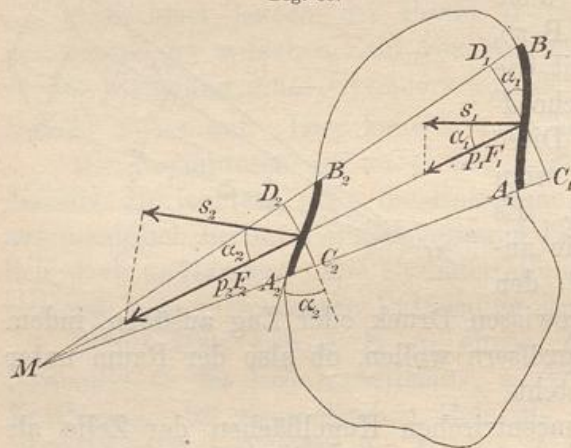
will den Zellenraum vergrößern, die andere ihn verkleinern. Da aber $F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2$ ist, so folgt $\frac{F_1}{r_1^2} - \frac{F_2}{r_2^2} = 0$. Druck und Zug

heben sich gegenseitig auf, so daß man sagen kann: Der Zellenraum steht unter der Spannung Null. Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn die ähnlichen Grundflächen irgend eine andere Gestalt hätten, wenn z. B. ein Kegel an Stelle der Pyramide träte. Faraday und Maxwell gebrauchen statt des Wortes Spannung die Bezeichnung Kraftfluß. Vergl. Nr. 53.

Bezeichnet man die auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte mit p_1 bzw. p_2 , so hat man $p_1 F_1 = p_2 F_2$ oder $p_1 : p_2 = F_2 : F_1$. Die Anziehungskräfte sind also umgekehrt proportional den Grundflächen. Diese einfache Bemerkung giebt zu äußerst interessanten Schlüssen Veranlassung.

— 106) In sich geschlossene Fläche unter Einwirkung äußerer Massenpunkte. Der Punkt M von der Masse 1 wirke jetzt auf die homogene Massenbelegung einer beliebig gestalteten

Fig. 83.



aber in sich geschlossenen Oberfläche ein. Unter welcher Spannung steht der Innenraum? (Der Raum wird als einfach zusammenhängend angenommen.)

Man denke sich von M aus einen Kegel MA_1B_1 von kleinem körperlichen Winkel gezeichnet, der die Fläche in A_1B_1 und A_2B_2 schneidet, was eine Zelle $A_1B_1B_2A_2$ mit den Grundflächen F_1 und F_2

geben möge. Macht man über die Belegungen der Grundflächen dieselben Annahmen, wie vorher, so sind die Anziehungsresultanten für die beiden Belegungen $p_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$, $p_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$. Jede zerlegt sich in

eine Spannungskraft, die senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist und in eine in die Fläche (Tangentialebene) fallende Kraft, also in einen wirksamen und in einen in Bezug auf die Spannung des Innenraumes unwirksamen Teil. Sind α_1 und α_2 die entsprechenden Neigungswinkel, so handelt es sich um $s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1$ und $s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$. Man denke sich jetzt durch den Angriffspunkt jeder dieser Resultanten

die zu M gehörige Niveaufläche gelegt, also z. B. C_1D_1 und C_2D_2 . Diese bilden mit den ursprünglichen Grundflächen (Tangentialebenen) ebenfalls die Winkel α_1 und α_2 , so daß die neuen Flächen von der Größe $F'_1 = F_1 \cos \alpha_1$ und $F'_2 = F_2 \cos \alpha_2$ sind. Daraus folgt

$$s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1 = \frac{F_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 = \frac{F'_1}{r_1^2}$$

und

$$s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2 = \frac{F_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \frac{F'_2}{r_2^2}.$$

Nun ist aber für die neuen Grundflächen, die einander ähnlich sind,

$$F'_1 : F'_2 = r_1^2 : r_2^2,$$

folglich ist, wenn man die entgegengesetzten Vorzeichen (Druck, Zug) berücksichtigt, die Summe der beiden Spannungen gleich Null. Also ist $p_1 F'_1 \cos \alpha_1 = p_2 F'_2 \cos \alpha_2$.

Wendet man das Verfahren auf sämtliche Teile der Oberfläche an, so findet dasselbe statt. Durch Summierung über die ganze Oberfläche folgt:

Befindet sich aufserhalb einer in sich geschlossenen Oberfläche, die homogen mit Masse belegt ist, ein anziehender Punkt, so ist die von ihm auf den Innenraum ausgeübte Gesamtspannung oder der Kraftfluß des Raumes gleich Null.

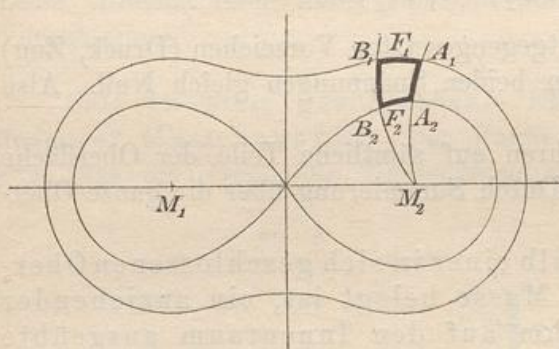
Dabei darf die Oberfläche auch so gestaltet sein, daß die von M aus gelegten Hilfskegel sie zum Teil mehrfach schneiden.

Liegen mehrere anziehende Massenpunkte aufserhalb der Fläche, so treten zu jeder Spannung s neue hinzu, die zu je zweien ebenfalls die Summe Null geben. Das Gesamtergebn wird also wiederum gleich Null. Die Massenpunkte dürfen auch eine kontinuierliche Linie, eine Fläche, einen Körper von beliebiger Gestalt bilden. Liegt das anziehende Gebilde aufserhalb der geschlossenen, homogen belegten Fläche, so ist die Gesamtspannung bzw. der Kraftfluß stets gleich Null.

107) Symmetrisches Zweipunktproblem. Am Beispiele des symmetrischen Zweipunktproblems soll die Bedeutung des Satzes auseinander gesetzt werden. In Fig. 84 sei $A_1B_1B_2A_2$ eine der kleinen Raumzellen mit den Grundflächen F_1 und F_2 und entsprechenden Seitenflächen. Man denke sich die Wände der Zelle in obiger Weise homogen mit Masse belegt, die von den Massenpunkten M_1 und M_2 , wo sich Masseneinheiten befinden, angezogen wird. Jedes Massenteilchen der Seitenwände wird so angezogen, daß die Resultante der Anziehungskräfte in die Wand selbst fällt, d. h. in die Richtung der

Tangente einer Kraftlinie. Die Wirkung auf die Spannung des Innenraums ist also gleich Null. In Frage kommen nur noch die auf F_1 und F_2 einwirkenden Anziehungen. Auf F_1 wirken zwei anziehende Kräfte $q_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$ und $q'_1 F_1 = \frac{F_1}{\varrho_1^2}$, deren Resultante $p_1 F_1$ in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fällt. Auf F_2 wirken ebenso zwei Kräfte $q_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$ und $q'_2 F_2 = \frac{F_2}{\varrho_2^2}$, deren Resultante $p_2 F_2$ in dieselbe Kraftlinie fällt. Sind nun die Niveauflächen F_1 und F_2 nur sehr wenig voneinander entfernt, so darf man die Kräfte als in denselben Geraden liegend betrachten, so daß man sie durch Addition vereinigen kann. Dies giebt die Spannung $p_1 F_1 - p_2 F_2$. Weil aber die beiden anziehenden Massen M_1 und M_2 außerhalb liegen, ist die Spannung des Zellenraums nach Laplace gleich Null, folglich ist $p_1 F_1 = p_2 F_2$. Ebenso ist der Kraftfluß der Zelle gleich Null.

Fig. 84.



Führt man demnach in der gezeichneten Kraftröhre an verschiedenen Stellen Normalschnitte $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$, so ist, wenn $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ die entsprechenden Einheitsresultanten sind, $p_1 F_1 = p_2 F_2 = p_3 F_3 = p_4 F_4, \dots$, d. h. das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt der Kraftröhre ist konstant.

Die auf die Einheit wirkende Kraft nimmt also in demselben Maße ab, wie der Normalschnitt zunimmt, d. h. sämtliche Normalschnitte jeder Kraftröhre werden mit derselben Kraft angezogen. Ebenso ist der Kraftfluß für die ganze Röhre konstant.

108) Allgemeinerer Folgerungen. Ganz dieselbe Betrachtung läßt sich aber für das unsymmetrische Zweipunktproblem anstellen, auch dann, wenn der eine Punkt anziehend, der andere abstoßend wirkt, sie gilt auch für das Mehrpunktproblem und für die Anziehung kontinuierlicher Massen. Also:

Bei jedem Problem der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gilt für die Normalschnitte jeder Kraftlinie der Satz, daß das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt eine konstante Größe ist.

Um von der Tragweite dieses Satzes einen Begriff zu erhalten, kann man einige einfache Betrachtungen anstellen.

109) Unendliche Kugel als Niveaufläche. Für jeden endlichen anziehenden Massenkomplex nehmen die Niveauflächen nach aufsen hin mehr und mehr die Gestalt von Kugeln an, die ihren Mittelpunkt im Schwerpunkte der anziehenden Massen haben. Denkt man sich die unendlich große Kugel auf irgend welche Art, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise bei beliebig liegendem Pol, in gleiche Flächen eingeteilt und für jeden Eckpunkt ihres Netzes die Kraftlinie konstruiert, so ist für alle Stellen sämtlicher Kraftstrahlen pF dieselbe Größe, jede Niveaufläche wird also so zerlegt, daß auf ihr pF konstant ist. (Man vergleiche dies mit den Betrachtungen über die Asymptoten im 5. Kapitel.) Dies erleichtert die Einteilung des Raumes in potentiell gleichwertige Zellen bei zahlreichen Problemen.

110) Das Gesetz der Zelleninhalte. Von Niveaufläche zu Niveaufläche möge die Einheit der Masse bewegt werden. Folgen die Potentialwerte der Niveauflächen einer arithmetischen Reihe, handelt es sich also um konstante Potentialdifferenzen, so ist zu jener Bewegung von Fläche zu Fläche überall dieselbe Arbeit pw nötig. Für irgend welche Raumstellen sei in diesem Sinne $pw = p_n w_n$. Nach Nr. 107 war zugleich $pF = p_n F_n$. Durch Division folgt

$$w : w_n = F : F_n.$$

Bezeichnet man also die Flächen F als die Grundflächen der Zellen, die w als ihre Höhen, so folgt:

Bei potentiell gleichwertiger Zelleneinteilung des Raumes verhalten sich die Grundflächen der Zellen wie ihre Höhen.

Ebenso, wie für das Zweipunktproblem gilt dies für das n -Punktproblem und für die allgemeinsten Probleme.

$$\text{Aus } \frac{w}{w_n} = \frac{F}{F_n} \text{ folgt } \frac{wF}{w_n F_n} = \frac{F}{F_n} \cdot \frac{F}{F_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2}.$$

Bezeichnet man also die Inhalte zweier Zellen mit J und J_n , so folgt:

$$\frac{J}{J_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2},$$

d. h. die Inhalte der Zellen eines Problems verhalten sich wie die Quadrate der Grundflächen, wie die Quadrate der

Höhen und umgekehrt wie die Quadrate der Einheitsresultanten.

In Fig. 84 sind die Potentialflächen Drehungsflächen. Sind e und e_n die Abstände zweier Zellen von der Drehungsachse, α und α_n die am Einheitskreise gemessenen Bogen zwischen benachbarten Meridianschnitten, $s = AB$ und $s_n = A_n B_n$ die aus der Zeichnung zu entnehmenden Seitenlinien der Flächen F und F_n , so ist $F = s \cdot e \alpha$ und $F_n = s_n \cdot e_n \alpha$, also

$$\frac{F}{F_n} = \frac{se}{s_n e_n} = \frac{w}{w_n} = \frac{p_n}{p}.$$

Auch dieser besondere Satz ist leicht in Worte zu kleiden.

111) Cylindrische Probleme. Die wichtigste Folgerung ist die auf die zweidimensionalen Probleme führende.

M_1 und M_2 in Fig. 84 seien die Darstellungen zweier unbegrenzten Geraden, die in derselben Dichte homogen mit Masse belegt sind. In allen Normalschnitten der beiden Geraden findet dann dasselbe statt, man braucht also nur einen einzigen Normalschnitt auf die Niveau- und Kraftlinien zu untersuchen, d. h. das Problem ist ein zweidimensionales.

Die Normalschnitte folgen bei gleichwertiger Zellenteilung längs der Richtung der parallelen Geraden in demselben Abstände aufeinander. An Stelle von $e\alpha$ für den Fall von Drehungsflächen tritt also einfach $e = e_n$. (Legt man die Drehungsachse ins Unendliche, so kann man ebenfalls $e = e_n$ setzen.) Jetzt also wird $F : F_n = es : es_n$, oder $F : F_n = s : s_n$. Es war aber

$$F : F_n = w : w_n,$$

demnach folgt

$$s : s_n = w : w_n = p_n : p.$$

Folglich:

Bei allen Zellen eines zweidimensionalen Problems verhalten sich die Grundlinien der Zellen wie ihre Höhen, die sämtlichen Zellen sind also kleine ähnliche Rechtecke, z. B. kleine „Quadrate“. Die Kräfte sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Zellen.

In der Anziehungslehre handelt es sich um unbegrenzte Cylinder als Niveauflächen. Der Satz gilt allgemein von jeder Art von Cylinderproblemen. Die Helmholtzschen Flüssigkeitsströmungen führen jetzt auf stationäre Strömungen in der Ebene, mögen diese nun hydrodynamischer Art oder Wärme- oder Elektrizitätsströmungen sein. Von hier aus lassen sich die Helmholtz-Kirchhoffschen Probleme der freien Ausflusstrahlen, gewisse elektromagnetische Probleme und die

dazu gehörigen Helmholtzschen Wirbelbewegungen behandeln, außerdem Probleme der Biegungs- und Torsionsfestigkeit, der Kapillarität, der Kartographie u. s. w. So führt der unscheinbare Laplacesche Satz in die wichtigsten Gebiete der neueren Physik, in die Probleme des sogenannten logarithmischen Potentials, dessen Begriff sich aus dem Folgenden ergeben wird.

112) Das zweidimensionale Einpunktproblem und das logarithmische Potential. Es handelt sich um die quadratische Einteilung der Ebene durch das Strahlenbüschel und die konzentrische Kreisschar. Dabei wird

$$s : s_n = w : w_n = r : r_n = F : F_n,$$

wo die F die Zellenflächen des zugehörigen Cylinderproblems sind. Aus

$$F : F_n = p_n : p$$

folgt für die anziehende Kraft, mit der der homogene Cylinder die freie Masseneinheit anzieht,

$$p : p_n = r_n : r,$$

d. h.

Die Anziehungskraft der unbegrenzten homogenen Geraden ist umgekehrt proportional der Entfernung.

Wird die Masseneinheit auf dem Radius ins Unendliche gebracht, so ist also das Arbeitsdiagramm eine gleichseitige Hyperbel von der Form

$$y = k \cdot \frac{1}{r}.$$

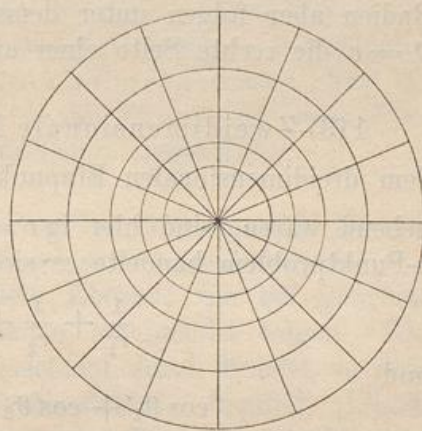
Die Entfernung bis ins Unendliche erfordert, wie das Diagramm zeigt, unendlich große Arbeit, was nicht wunder nimmt, da die auf der unbegrenzten Geraden homogen verteilte anziehende Masse bei endlicher Dichte selbst unendlich groß ist. Das Potential ist also an jeder Stelle unendlich groß, d. h. der Newtonsche Potentialbegriff wird unbrauchbar.

Nun läßt sich aber elementar zeigen, daß die Fläche der gleichseitigen Hyperbel von 1 bis r

$$F = k \lg r$$

ist (vgl. Meth. Lehrbuch III, Seite 136). Es ist zweckmäßig, jetzt

Fig. 85.



diesen Ausdruck als das Potential zu betrachten. Der Name logarithmisches Potential erklärt sich von selbst.

Unter Potential in einem Punkte versteht man also jetzt die Arbeit, die nötig ist, die Masseneinheit aus dem Abstände 1 von der Geraden in den Abstand r jenes Punktes von der Geraden zu versetzen.

Die potentielle Gleichwertigkeit der Zelleneinteilung erhält man dadurch, daß man den Wert c von $\lg r$ einer arithmetischen Reihe folgen läßt. Da aus $e = \lg r$ folgt $r = e^e$, was einer geometrischen Reihe folgt, wenn c einer arithmetischen folgt, so ergibt sich, wie selbstverständlich, daß man lauter ähnliche Kreisringe erhält. Die Radien aber folgen unter demselben Winkel aufeinander, so daß in $\vartheta = c$ die rechte Seite einer arithmetischen Reihe zu folgen hat.

113) Zweidimensionale Mehrpunktprobleme. Während bei dem dreidimensionalen Einpunktproblem $\frac{1}{r} = c$ und $\cos \vartheta = c$ maßgebend waren, sind hier $\lg r = c$ und $\vartheta = c$ maßgebend. Für das n -Punktproblem handelte es sich früher bei gleichen Massen um

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = c$$

und

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_n = c.$$

An Stelle dieser Gleichungen treten jetzt die folgenden:

$$1) \quad \lg r_1 + \lg r_2 + \dots + \lg r_n = c$$

$$2) \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n = c$$

Statt der ersteren läßt sich auch schreiben

$$\lg(r_1 r_2 \dots r_n) = c$$

oder

$$1)* \quad r_1 r_2 \dots r_n = e^c.$$

Bei ungleichen „Massen“ erhält man

$$3) \quad m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_2 + \dots + m_n \lg r_n = c,$$

$$4) \quad m_1 \vartheta_1 + m_2 \vartheta_2 + \dots + m_n \vartheta_n = c.$$

Für 3) läßt sich auch schreiben

$$\lg(r_1^{m_1} r_2^{m_2} \dots r_n^{m_n}) = c$$

oder

$$r_1^{m_1} r_2^{m_2} \dots r_n^{m_n} = e^c.$$

Die m können sämtlich positiv oder teilweise negativ sein.

Für die Kurvenscharen 1 und 3 hat Verfasser vor längeren Jahren (Bd. 83 des Crelleschen Journals) für den Fall der regelmässigen Anordnung der Punkte auf einem Kreise den Namen „reguläre Lemniskaten n^{ter} Ordnung“, für die Kurven 2 und 4 die Namen „reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ vorgeschlagen. Für beliebige Anordnungen nannte er sie „irreguläre Lemniskaten bzw. Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ (Progr. 1880 der Hagener Gewerbeschule). Diese Namen sind in zahlreichen Abhandlungen (z. B. von Biermann, Laurin, Forchheimer, Guébbard, Hildebrand) beibehalten worden. Für den Fall $n = 1$ handelt es sich um konzentrische Kreisschar und Strahlenbüschel, für $n = 2$ unter Voraussetzung positiver gleicher m um konfokale Lemniskaten (Cassinische Kurven) und ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, bei entgegengesetzten m um Kreisschar und Kreisbüschel. Sämtliche gestatten Einteilung der Ebenen in kleine Quadrate. Kap. X, XI, XII in des Verfassers Einführung in die Theorie der isog. Verwandtschaften besprechen diese Kurvenscharen eingehender.

114) Das Problem der unbegrenzten homogenen Ebene und das Planpotential. Die Kraftlinien stehen senkrecht auf der Ebene, die Niveauflächen sind parallele Ebenen, die bei gleichen Potentialdifferenzen in gleichen Abständen aufeinander folgen. Die naturgemässe Einteilung des Raumes geschieht durch Würfel, so dass es sich um quadratische Prismen als Krafröhren handelt. [Nach Nr. 104 könnte man allerdings auch ringförmige Einteilung der Niveauflächen wählen, wie Maxwell sie bisweilen anwendet (vgl. Fig. 81). Dafs auch die Einteilung in gleichseitige Dreiecke, regelmässige Sechsecke, in Ringe ähnlicher Polygone erfolgen darf, darauf sei gleichfalls hingewiesen.] Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit erfolgt in den Röhren mit konstanter Geschwindigkeit. Aus $v = v_1$ folgt nach Nr. 53 $p = p_1$, so dass die Anziehung der Ebene in allen Entfernungen dieselbe ist. Das Arbeitsdiagramm, ein Rechteck, ändert seinen Inhalt in gleichen Abständen stets um dieselbe Gröfse. Bei Bewegung der angezogenen Masseneinheit auf einer der Kraftlinien wird also das Diagramm der Potentialwerte wie bei dem Ohmschen Gesetze durch eine schräge Gerade begrenzt. Das Newtonsche Potential würde für die Bewegung bis ins Unendliche überall einen unendlich grossen Wert geben. Es ist also vorzuziehen, den von der Ebene aus gemessenen Rechtecksinhalt als das Potential zu betrachten, und für dieses neue Potential den Namen Planpotential einzuführen. Da nach Nr. 27 bzw. 74 die Anziehung der Ebene bei einer homogenen Belegung von Dichte $\delta = 1$ überall gleich 2π ist, so ist in der Entfernung x das Planpotential gleich $2\pi x$. Selbstverständlich kann dazu noch eine Gravitationskonstante k als Faktor treten. In

jedem System von Kraftlinien und Niveaulinien bzw. Niveauflächen läßt sich — von gewissen singulären Punkten abgesehen — jeder unendlich kleine Raum zwischen zwei benachbarten Niveauflächen als homogenes Feld betrachten, sobald er durch Kraftlinien begrenzt ist.

115) Die logarithmische Abbildung. Der direkte Übergang von der quadratischen Einteilung durch Strahlenbüschel und konzentrische Kreisschar zur quadratischen Einteilung durch Parallelenschar kann mit Hilfe der logarithmischen Abbildung $Z = \lg z$ oder

$$X + Yi = \lg(x + yi),$$

wo i gleich $\sqrt{-1}$ ist und die bekannte geometrische Darstellung der komplexen Größen nach Argand-Gaußs benutzt wird, geschehen. Es ist nämlich für die letzte Gleichung zu schreiben

$$\begin{aligned} X + Yi &= R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \lg[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \lg r + \lg e^{i\varphi} \\ &= \lg r + \varphi i, \end{aligned}$$

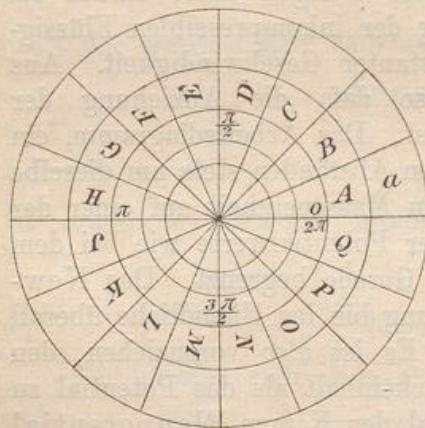
so daß

$$X = \lg r = \lg \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$Y = \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

ist. Dem Kreise $\lg r = c$ in Fig. 86a oder $r = e^c$ entspricht also die vertikale Gerade $X = c$ in Fig. 86b, dem Strahle durch den Nullpunkt von Neigung $\vartheta = c$ entspricht die horizontale Gerade $Y = c$.

Fig. 86 a.



Da statt $\vartheta = c$ auch geschrieben werden kann $\vartheta + 2n\pi = c$ erkennt man, daß der Geraden $\vartheta = c$ unendlich viele horizontale Gerade $Y = c + 2n\pi$ entsprechen können. Die Abbildung der z -Ebene geschieht also auf unendlich viele horizontale Parallelstreifen von der Breite 2π , die sich von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ erstrecken. (Vieldeutigkeit des Logarithmus, Periodizität der Exponentialfunktion.)

Die Gerade $X = 0$ entspricht dem Einheitskreise, die Geraden $Y = 0$ und $Y = \pm 2n\pi$ entsprechen der X -Achse von 0 bis $+\infty$. Die Diagonalkurven

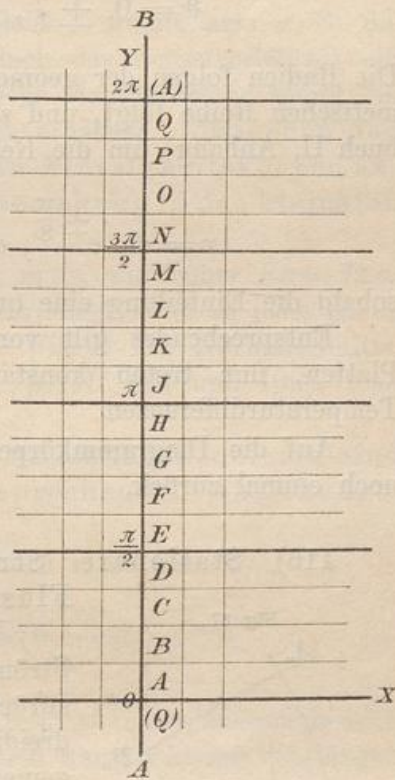
in der Z -Ebene sind Gerade von 45° Neigung, in der z -Ebene logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel 45° . Man hat zugleich den Zusammenhang zwischen der Polarkarte von Hipparch-Ptolemaeus

und der Schifffahrtkarte von Mercator. Beliebigen Geraden von der Neigung γ auf dieser Karte entsprechen logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel γ mit den Radien in der andern. Diese sind die Darstellungen der loxodromischen Schifffahrtslinien, die sich ergeben, wenn ein Schiff stets denselben Kurs beibehält. Zieht man also z. B. von einem Küstenpunkte Englands nach einem solchen Brasiliens auf der Mercatorkarte eine gerade Linie, so erhält man den zu wählenden Kurs als Neigung der Geraden. Von Tag zu Tag wird auf der Fahrt durch Chronometer und durch Beobachtung der Mittagshöhe (oder auf der Nordhalbkugel durch Beobachtung der Höhe des Polarsterns) Länge und Breite für das Schiff bestimmt und in die Mercatorkarte eingetragen. Der Meeresströmungen wegen und wegen der seitlichen Abweichungen durch Winddruck wird der gefundene Ort nicht genau in die gezeichnete Linie fallen, so daß man erkennt, in welcher Weise durch geänderten Kurs der Fehler korrigiert werden kann. Darin beruht die Wichtigkeit der Mercatorkarte und der logarithmischen Abbildung für die Nautik. (Vergl. Kapitel XIII der „Isogonalen Verwandtschaften“, wo im Anschluß an eine Abhandlung des Verfassers in Bd. 16 der Schlömilchschen Zeitschrift die Eigenschaften der Spiralen und Loxodromen in leichter Weise abgeleitet werden. Burmester hat in seiner Kinematik und in Bd. 20 derselben Zeitschrift diese Betrachtungen für kinematische Zwecke verwendet.)

Fig. 86a und b giebt gewissermaßen den Zusammenhang des logarithmischen Potentials und des Planpotentials, sowohl im Newtonschen Sinne als auch im Helmholtzschen Sinne des Geschwindigkeitspotentials.

Strömt z. B. von der unbegrenzten Geraden AB (Fig. 86b) aus Wärme in der Richtung nach $x = +\infty$ ab und wird dabei die Gerade auf konstanter Temperatur gehalten, so sind die senkrechten Parallelen Isothermen, die horizontalen sind Stromlinien. Strömt dagegen in Fig. 86a vom Einheitskreise aus Wärme nach dem unendlichen Bereiche

Fig. 86 b.



ab, so sind die konzentrischen Kreise Isothermen, die Strahlen sind Stromlinien. In beiden Fällen entsprechen die benachbarten Niveauebenen konstanten Temperaturunterschieden.

In Fig. 86a folgen die Strahlen unter dem Winkel $\frac{\pi}{8}$ oder $\frac{2\pi}{16}$ aufeinander, die Neigungen bilden also die arithmetische Reihe

$$\vartheta = 0, \pm \frac{\pi}{8}, \pm \frac{2\pi}{8}, \pm \frac{3\pi}{8}, \pm \frac{4\pi}{8}, \dots$$

Die Radien folgen der geometrischen Reihe für e^c , wo c einer arithmetischen Reihe folgt, und zwar handelt es sich (vgl. Method. Lehrbuch II, Anhang) um die Reihe

$$r = e^0, e^{\pm \frac{\pi}{8}}, e^{\pm \frac{2\pi}{8}}, e^{\pm \frac{3\pi}{8}}, e^{\pm \frac{4\pi}{8}}, \dots,$$

sobald die Einteilung eine quadratische ist.

Entsprechendes gilt von der elektrischen Strömung in ebenen Platten, nur treten konstante Potentialdifferenzen an Stelle der Temperaturdifferenzen.

Auf die Diagrammkörper dieser Potentiale kommen wir später noch einmal zurück.

116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Fig. 87.



Wir kehren zu den in Nr. 53 besprochenen Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten zurück, und zwar soll es sich wieder um den dreidimensionalen Raum, jedoch um ganz allgemein gestaltete Kraftlinien handeln.

Fig. 87 stellt einen von Kraftlinien gebildeten sehr eng zu denkenden Kanal dar. Damit die früher besprochene Bewegung überhaupt möglich sei, sind gewisse Annahmen zu machen. Abzusehen ist von der inneren und äußeren Reibung der Flüssigkeit und den daraus erfolgenden Drehungen der Moleküle. Auch vom Einflusse der Beharrung ist abzusehen. Oben war dies alles nicht nötig, da die Flüssigkeit geradlinig strömte. Jetzt ist die Strömung eine krummlinige, also würde die Flüssigkeit infolge der Beharrung

sich tangential von der Stromlinie entfernen. Dies ist wegzudenken oder durch Annahme wirklicher Kanalwände unmöglich zu machen.

Außerdem ist AA_1 verschieden von BB_1 , was zugleich einen Geschwindigkeitsunterschied bedeutet. Die Reibung zwischen benachbarten Stromlinien ist also gleichfalls wegzudenken, in jeder Stromlinie also vollziehen sich die Bewegungen unbeeinflusst durch die Vorgänge in den benachbarten.

Jeder kleine Rechteckskörper der Flüssigkeit, der wie $AB B_1 A_1$ von Niveauflächen und Stromflächen (Stromlinien) begrenzt ist, bleibt während der ganzen Bewegung ein solcher, nimmt also z. B. die Gestalt $A_{n-1} B_{n-1} B_n A_n$ an, wobei jedoch das Seitenverhältnis ein anderes geworden ist. Das einbeschriebene Hauptellipsoid bleibt ein solches, erhält jedoch ein anderes Achsenverhältnis. Zwischen den verschiedenen Gestaltungen, die ein Flüssigkeitskörper annimmt, besteht also eine Affinitätsbeziehung in den kleinsten Teilen.

Da die Strömung stationär sein soll, muß, wie früher $Fv = F_n v_n$ oder $F : F_n = v_n : v$ sein, d. h. die Geschwindigkeit ist an jeder Stelle des Kanals umgekehrt proportional der Fläche des Normalschnitts. Oben war ganz allgemein $F : F_n = p_n : p$ (Nr. 107 und 108), also ist $v : v_n = p : p_n$, d. h.

Die Geschwindigkeiten jedes Strömungsproblems sind proportional den Kräften des entsprechenden Anziehungsproblems.

Beim symmetrischen Zweipunktproblem z. B. war

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Abgesehen von einem konstanten Faktor folgt v^2 in den entsprechenden Krafröhren demselben Ausdrucke. Zugleich war für kleine Weglängen

$$p = k \frac{V_2 - V_1}{w} = km \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w},$$

also muß auch hier

$$v = k \frac{V_2 - V_1}{w} = km \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w} = kG$$

sein. Demnach ist $v : v_n = G : G_n$, d. h. die Geschwindigkeit proportional dem Potentialgefälle. Der Ausdruck $vF = kF \frac{V_2 - V_1}{w}$ bedeutet die konstante Stromstärke innerhalb des Kanals.

Die Darlegungen der Abschnitte 53 bis 55 über elektrische und Wärmeströmungen könnten also an dieser Stelle wörtlich wiederholt und auf die allgemeinen Formen der Krafröhren übertragen werden.

Die Punkte, aus denen die Wärme oder Elektrizität ausströmt, sollen als Quellpunkte bezeichnet werden. Diese Punkte können von verschiedener Ergiebigkeit sein, auch von negativer. Dies entspricht der Konzentration verschiedener Mengen von Elektrizität oder ponderabler Masse, von denen die ersteren entgegengesetzte Vorzeichen haben können. Strömen z. B. aus M_1 und M_2 verschiedene Wärmemengen μ_1 und μ_2 in den Raum, was dadurch erreicht werden kann, daß sie auf entsprechend verschiedenen Temperaturen gehalten werden, so sind die Stromlinien von der Form $\mu_1 \cos \vartheta_1 + \mu_2 \cos \vartheta_2 = c$, die Isothermen von der Form

$$T = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = c.$$

Ist k die Leitungsconstante, so ist $kF \frac{T_2 - T_1}{w} = kFG$ die sekundlich passierende Wärmemenge. Der Ausdruck Wärmemenge ist nur als Veranschaulichung zu betrachten. Sollen sämtliche Kraftströme potentiell gleichwertig sein, so muß durch sämtliche Querschnitte aller Röhren dieselbe Menge fließen. Sind Asymptoten vorhanden, so gehört eine unendliche, um den Schwerpunkt S gelegte Kugel zum Problem. Auf dieser müssen dann sämtliche Kraftströme gleiche Flächen ausschneiden. Dies entspricht dem gleichen körperlichen Winkel bei dem Einpunktproblem.

So entspricht jedem Anziehungsproblem ein Problem, bei dem es sich um stationäre Strömung einer Flüssigkeit, oder der Elektrizität oder der Wärme handelt.

Ist die Strömung zweidimensional, so bleiben nach Nr. 111 kleine quadratische Felder stets quadratische Felder, ein einbeschriebener Kreis also bleibt ein einbeschriebener Kreis, d. h. es findet nicht nur Affinität, sondern Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen statt. Hierbei handelt es sich z. B. um Elektrizitäts- oder Wärmeströmungen in dünnen Platten, auf die wir noch näher eingehen werden.

Selbstverständlich kann man von dem Laplaceschen Satze folgende Umkehrung aussprechen: Steht eine in sich geschlossene, homogen mit Masse belegte Fläche unter einer Spannung, die von Null verschieden ist, so können nicht sämtliche anziehende Massenpunkte außerhalb der Fläche liegen.

117) Der Kugelsatz von Gauß.

Wiederum diene das symmetrische Zweipunktsystem mit positiven Massen M_1 und M_2 von der Größe 1 als einleitendes Beispiel. Um irgend einen Punkt C sei eine Kugel gelegt, die M_1 und M_2 einschließt. Jede Einheit ihrer Oberfläche sei mit der Masse 1 belegt.

Die Summe der Potentialwerte für die Kugeloberfläche soll gebildet werden.

Alle Rechnung wird dadurch erspart, daß man sich umgekehrt die homogene Kugelfläche als anziehend wirkend auf M_1 und M_2 denkt, nur sind diese beiden Punkte starr verbunden zu denken, damit ihre gegenseitige Einwirkung aufgehoben wird. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist dann das Resultat dasselbe. Nach Nr. 25 hat man sich die Belegung $4q^2\pi$ im Mittelpunkte C vereinigt zu denken. Nach dem Satze von der Arbeit sind beide Potentiale algebraisch zu addieren, es handelt sich also um

$$\frac{4q^2\pi}{r_1} + \frac{4q^2\pi}{r_2} = 4q^2\pi \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = P.$$

Folglich ist auch die Summe der Potentialwerte von M_1 und M_2 für alle Punkte der Kugeloberfläche

$$P_k = 4q^2\pi \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Nun ist aber das Potential der Punkte M_1 und M_2 für den Punkt C von der Größe

$$P = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

demnach ist zugleich

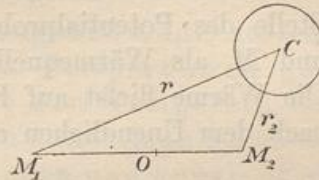
$$P = \frac{P_k}{4q^2\pi}.$$

Letzteres ist aber nichts anderes als der Mittelwert der Potentialwerte von M_1 und M_2 in den Punkten der Kugeloberfläche, der Potentialwert von M_1 und M_2 für den Punkt C ist also gleich dem Mittelwerte der Potentialwerte für sämtliche Punkte der Kugeloberfläche.

Ganz dieselbe Betrachtung kann man für drei, ganz allgemein für n feste Massenpunkte von beliebiger Masse anstellen, nur müssen diese sämtlich außerhalb der homogen mit Dichte 1 belegten Kugeloberfläche liegen. Diese Massenpunkte können auch kontinuierliche Körper, Flächen und Linien bilden. Daher gilt ganz allgemein der von Gaußs aufgestellte Satz:

Wird durch irgend welche Massen, die außerhalb einer Kugelfläche liegen, auf die homogene Massenbelegung der letzteren eine dem Newtonschen Gesetze folgende Anziehung ausgeübt, so ist der mittlere Potentialwert für die Punkte

Fig. 88.



der Kugeloberfläche gleich dem Potentialwerte für den Mittelpunkt der Kugel.

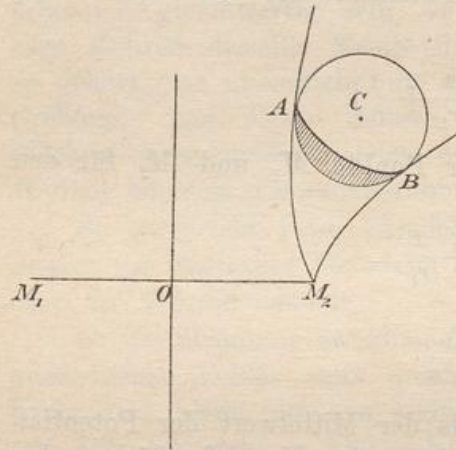
118) Physikalische Deutungen des Gaußschen Kugelsatzes.

Setzt man in der vorigen Betrachtung das Wärmeproblem an Stelle des Potentialproblems, so sind für das gewählte Beispiel M_1 und M_2 als Wärmequellen von konstanter Temperatur zu betrachten. Die Wärme fließt auf Kurven von der Gleichung $\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c$ nach dem Unendlichen ab, die Isothermenflächen sind von der Gestalt

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c.$$

Diese Flächen schneiden die um C gelegte Kugeloberfläche. Da an Stelle der Potentialwerte in den einzelnen Punkten Temperaturen treten, so folgt, daß die Temperatur im Mittelpunkte C der Kugel gleich der mittleren Temperatur ihrer Oberflächenpunkte ist.

Fig. 89.



Das Einströmen der Wärme geschieht in dem schraffierten Teile der Kugeloberfläche, der von einer sphärischen Kurve AB begrenzt ist, das Ausströmen im Reste der Fläche. Da die Wärmeströmung als stationär angenommen ist, fließt ebensoviel Wärme ein, wie aus (der Kraftfluß ist für die Kugel gleich Null).

Durch die geschlossene Linie AB wird die in Frage kommende Kraftrohre, welche die Kugeloberfläche berührt, abgegrenzt. Längs dieser Linie tritt keine Wärme in die Kugel ein, auch nicht aus ihr heraus. Die in jeder kleinen Kraftrohre fließenden Wärmemengen sind uns bekannt.

Dieselbe Betrachtung gilt für elektrische Strömungen entsprechender Art.

119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem.

Man denke sich jetzt die Kugel aus ihrer Umgebung herausgelöst, halte aber jeden Punkt ihrer Oberfläche konstant auf derselben Temperatur, die ihm vorher zukam, so wird sich in dem homogenen Innenraum dieselbe stationäre Strömung einstellen, wie vorher. Ist

dieser Zustand hergestellt, so hat man dieselben Stromlinien und dieselben Isothermenflächen wie vorher. In dem schraffierten Teile der Oberfläche muß man Wärme in demselben Maße wie vorher zuführen, im andern Teile abführen, um die Temperaturen konstant zu erhalten. Die Summe der zuzuführenden Gesamtwärme ist Null.

Man hat also folgende besondere Aufgabe gelöst:

Die Punkte der Oberfläche einer homogenen Kugel sollen durch Zu- und Abfluß auf konstanten Temperaturen gehalten werden, und zwar so, daß diese den Temperaturen entsprechen, die den Oberflächenpunkten zukommen würden, wenn aus zwei außerhalb liegenden gleichen und konstanten Wärmequellen M_1 und M_2 Wärme nach dem unendlichen Bereiche abströmt. Für den sich einstellenden stationären Zustand soll folgendes bestimmt werden: a) Die Gestalt der Stromlinien, b) die Gestalt der Isothermenflächen, c) die Temperatur jedes Punktes im Innern, d) die Menge der auf jeder Einheit der Oberfläche zu- oder abströmenden Wärme, e) die Oberfläche soll in ein Netz von Kraftfeldern potentieller Gleichwertigkeit eingeteilt werden, so daß in sämtlichen Kraftröhren dieselbe Wärmemenge fließt.

Zu c) ist zu bemerken, daß der Mittelpunkt C die mittlere Temperatur der Oberfläche erhält, zu d) daß die Summe der zuzuführenden Wärme gleich Null sein muß.

Dieselbe Aufgabe ist für jedes der elementaren Behandlung zugängliche Mehrpunktproblem gelöst, sobald nur sämtliche Quellpunkte außerhalb der Kugeloberfläche liegen. Bei drei auf gerader Linie liegenden Punkten z. B., die auf konstanten Temperaturen t_1 , t_2 , t_3 gehalten werden, handelt es sich um die Stromlinien $t_1 \cos \vartheta_1 + t_2 \cos \vartheta_2 + t_3 \cos \vartheta_3 = c$ und um die Niveauflächen

$$\frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} + \frac{t_3}{r_3} = c.$$

Hat der Kugelmittelpunkt von M_1 , M_2 , M_3 die Entfernungen e_1 , e_2 , e_3 , so ist die Temperatur in ihm von der Höhe

$$\frac{t_1}{e_1} + \frac{t_2}{e_2} + \frac{t_3}{e_3},$$

und dies ist die Mitteltemperatur für die Oberfläche.

So erhält man eine ganze Reihe lösbarer Fälle der allgemeineren Fourierschen Kugelaufgabe, welche lautet:

Auf einer Kugeloberfläche sei jedem Punkte eine bestimmte Temperatur vorgeschrieben. Der stationäre Wärmezustand des Kugelinnern soll bestimmt werden.

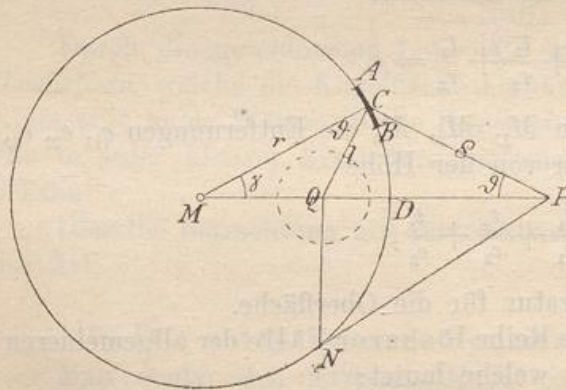
Entsprechende Aufgaben für elektrische Strömungen innerhalb der Kugel aufzustellen, sei dem Leser überlassen. Auch dabei muß die Summe der zugeführten Elektrizitäten gleich Null sein.

[Von der Lösung der allgemeinen Kugelaufgabe, die mit Hilfe der sogenannten Kugelfunktionen zu erfolgen hat, kann hier selbstverständlich nicht die Rede sein. Es handelt sich nur darum, einen vorläufigen Begriff von jenem interessanten und schwierigen Gebiete der höheren Mathematik und der mathematischen Physik zu geben, bei dem man selbstverständlich auch andere Flächen, z. B. Cylinderflächen, Kegelflächen, Hyperboloid-, Paraboloid-, Ellipsoidflächen u. s. w. benutzen kann. Die Lösung solcher Aufgaben beansprucht wieder die Kenntnis besonderer Funktionen, der Cylinderfunktionen u. s. w. Die für die Oberfläche vorgeschriebenen Werte bezeichnet man als die Randbedingungen des Problems. Statt die Strömung im Innenraume der Kugel zu betrachten, kann man auch die im Außenraume stattfindende betrachten, wobei die Punkte wiederum auf konstanten Temperaturen gehalten werden, aber M und M_1 einerseits, der unendliche Bereich andererseits als Zu- oder Abströmungsgebiete zu betrachten sind. So giebt der Laplacesche Satz Einblick in Gebiete der modernen Physik und Mathematik, auf denen Fourier, Green, Gauß, Riemann, Dirichlet, Jacobi, Neumann und andere erfolgreich gearbeitet haben.]

120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art.

In Nr. 25 war gezeigt, daß $\varrho = \frac{le}{r}$ ist (Fig. 90). Die Anziehung des Bogens $AB = s$ auf P ist bei dem zweidimensionalen

Fig. 90.



Probleme durch $\frac{s}{e}$ oder $\frac{sr}{le}$ gegeben, die in die Linie MP fallende Komponente also durch $\frac{sr}{le} \cos \vartheta$. Die Summe sämtlicher Bogenteilchen giebt

$$\frac{r}{e} \sum \frac{s \cos \vartheta}{l},$$

wobei, ähnlich wie früher, $\frac{s \cos \vartheta}{l}$ als Projektion jedes

Bogens $s = AB$ auf den um den reciproken Punkt Q geschlagenen Einheitskreis betrachtet werden kann, so daß

$$\sum \frac{s \cos \vartheta}{l} = 2\pi,$$

die Gesamtwirkung also gleich

$$\frac{r}{e} 2\pi = \frac{m}{e}$$

ist, wo m die Belegung des Umfangs ist. Folglich:

Die Anziehung des homogenen Kreisumfangs auf einen äußeren Punkt nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials ist so groß, als ob die Gesamtbelegung im Centrum M vereinigt wäre.

Von hier aus führen wörtlich dieselben Schlüsse zu einem Satze über den Kreis, der dem Kugelsatze ganz analog ist. Werden z. B. die Punkte eines Kreises auf konstanten Temperaturen gehalten, so ist für den stationären Zustand der dünnen Kreisplatte das System der Strom- und Niveaulinien bestimmbar, ebenso die Temperatur jedes Punktes. Die des Mittelpunktes ist das arithmetische Mittel der Randtemperaturen.

Beispiele darüber sollen später gegeben werden.

121) **Bemerkung.** Befindet sich der angezogene Punkt in Q , so entspricht jedem kleinen Bogen s_1 ein gegenüberliegender s_2 . Die kleinen Dreiecke $A_1 B_1 Q$ und $A_2 B_2 Q$ sind nach dem bekannten Sehnensatze ähnlich. Demnach gilt für die Mittellinien l_1 und l_2 , daß $\frac{s_1}{l_1} = \frac{s_2}{l_2}$ ist. Ziehen sich also die Massen nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials an, so ist der Punkt Q unter dem Einflusse von l_1 und l_2 in Ruhe.

Aus

$$\frac{s_1}{e_1} \cos \vartheta = \frac{r s_1}{e l_1} \cos \vartheta$$

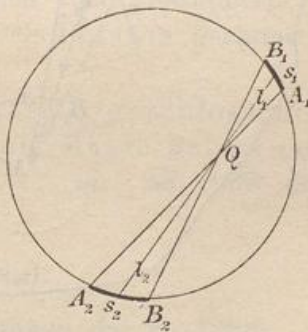
und

$$\frac{s_2}{e_2} \cos \vartheta = \frac{r s_2}{e l_2} \cos \vartheta$$

folgt für die Anziehung von P auf einem Bogen $A_1 B_1$ und seinem Gegenbogen $A_2 B_2$ in Bezug auf den reciproken Punkt Q , daß beide Anziehungen gleich stark sind. (Vgl. Nr. 25.)

Über homogene Kreisscheiben und Kreisringe lassen sich also ganz analoge Schlüsse ziehen, wie früher über homogene Voll- und Hohlkugeln.

Fig. 91.



Die zweidimensionalen Probleme gelten auch für das Newtonsche Potential, sobald man annimmt, es handle sich nur um den Normalschnitt unbegrenzter Cylinder und von Systemen unbegrenzter paralleler Geraden.

122) Der Spannungssatz von Poisson.

Im Mittelpunkte einer Kugel befinde sich die Masse 1. Ihre Oberfläche habe eine Massenbelegung von der Dichte 1. Jedes Flächenteilchen F wird von der Kraft $\frac{F}{r^2}$ nach innen gezogen. (Die Gravitationskonstante k ist gleich 1 gesetzt.) Ist z. B. $r = 1$, so ist seine Anziehung gleich F . Im allgemeinen ist die Massenbelegung gleich $4r^2\pi$. Angenommen, die Einzelkräfte ließen sich algebraisch summieren, was nicht der Fall ist, so würde die Anziehung gleich $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$ sein.

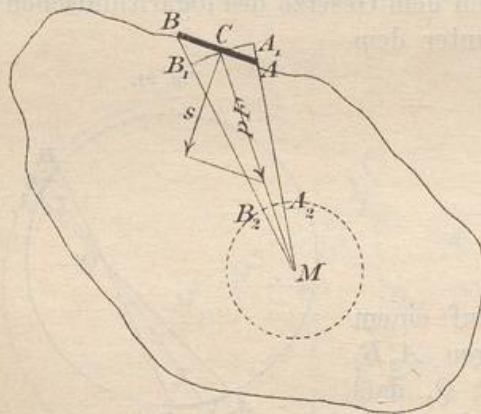
Man hat sich trotz der Unzulässigkeit dieser Addition zu der Ausdrucksweise geeinigt, der Innenraum stände unter der Spannung 4π . Faraday drückt sich so aus, daß er sagt, der Kraftfluß des Problems sei gleich 4π . Ist dagegen im Mittelpunkte die Masse m vereinigt, so handelt es sich um die Spannung bzw. den Kraftfluß $4\pi m$.

Lag der anziehende Punkt außerhalb der Kugel, so war in jeder Zelle der Kraftfluß gleich Null, jene Addition machte also keine Bedenken. Das Bedenken schwindet auch hier, wenn man den Vergleich mit der inkompressiblen Flüssigkeit heranzieht. Durch jeden Normalschnitt der einzelnen Kraftrohre strömt sekundlich (abgesehen

von der Konstante k) die Flüssigkeitsmenge $Fv = \frac{F}{r^2}$, durch die ganze Oberfläche also die Menge $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$. Dadurch ist dem hier etwas fremdartig klingenden Spannungsbegriffe wenigstens eine annehmbare physikalische Bedeutung gegeben. Seine Brauchbarkeit wird sich in den folgenden Beispielen ergeben.

Ist die Fläche in sich geschlossen, der Innenraum einfach zusammenhängend (d. h. so beschaffen, daß jeder ebene Schnitt den Zusammenhang aufhebt, nicht, wie bei einer Ringfläche, ihn bestehen läßt), so ist die von der Einheit in M auf jede Fläche AB ausgeübte Kraft $pF = \frac{F}{r^2}$. Sie zerlegt

Fig. 92.



sich wie früher in einen unwirksamen Teil und in einen wirksamen Spannungsteil

$$s = pF \cos \alpha = \frac{F}{r^2} \cos \alpha,$$

was sich wiederum deuten läßt als Projektion von AB auf die um M geschlagene Einheitskugel, für die wirklich

$$A_2 B_2 = \frac{AB \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

ist, sobald CM und die Normale in C den Winkel α einschließen. Demnach ist

$$\sum pF \cos \alpha = \sum (A_2 B_2) = 4\pi,$$

d. h. dies ist die Spannung, unter welcher der Innenraum steht.

Finden Ausbuchtungen statt, die durch eine von M ausgehende Tangentialebene MAB begrenzt werden, so verhält sich M gegen den Teil ABC wie ein äußerer Punkt. Der Beitrag der Ausbuchtung für die Spannung ist demnach gleich Null. Der Satz bleibt also bestehen. Untersuchungen über mehrfach zusammenhängende Räume, wie sie von Neumann und Helmholtz angestellt sind, sollen hier unterbleiben.

Befinden sich mehrere anziehende Massenpunkte $m_1, m_2, m_3 \dots$ im Innern, so sind die betreffenden Spannungsnormalen überall zu addieren, es handelt sich also um die Gesamtspannung

$$4\pi(m_1 + m_2 + \dots + m_n).$$

Für elektrische und magnetische Untersuchungen können die m teils positiv, teils negativ sein. Die Punkte können auch kontinuierliche Körper bilden. So ergibt sich folgender nach Poisson genannter, aber auch von Gaußs behandelter Satz:

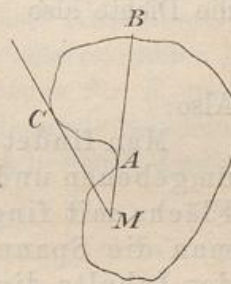
Befinden sich im Innern einer in sich geschlossenen Fläche, die homogen in der Dichte 1 mit Masse belegt ist, Massen oder Massengebilde $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$, so steht der Raum unter der Spannung

$$4\pi(m_1 + m_2 + \dots + m_n).$$

Ebenso groß ist nach Faradays Anschauung der Kraftfluß.

Wenn im folgenden von der Spannung, unter der ein von geschlossener Fläche umgrenzter Raum steht, gesprochen wird, so ist dabei immer eine fingierte Massenbelegung von der Dichte 1 auf der Fläche angenommen. Der Kürze halber soll dies nicht mehr besonders

Fig. 93.



hervorgehoben werden. Man erkennt aus obigem, daß der Spannungsbegriff ebenso, wie das Potential, seine Kraft in der Möglichkeit der algebraischen Addition hat.

123) Zusammenhang zwischen Dichte und Spannung. Man denke sich einen massiven Körper, dessen Dichtigkeit zwar an verschiedenen Stellen verschieden ist, aber überall nur stetig veränderlich und nirgends unendlich groß, so daß in der nächsten Umgebung jeder Stelle von einer mittleren Dichte gesprochen werden kann. Irgendwo im Innern des Körpers denke man sich eine kleine, im obigen Sinne in sich geschlossene Fläche. Unter welcher Spannung steht dieselbe? Nach dem Laplaceschen Satze giebt die äußere Masse die Spannung Null. Nach dem Poissonschen steht sie unter der Spannung $4\pi m$, wenn m die eingeschlossene Masse ist. Bedeutet nun J den geometrischen Inhalt des Raumes, δ die mittlere Dichte der Massenanfüllung im Innern der Fläche (bei unendlich kleinen Dimensionen der Dichte δ selbst), so ist $m = J\delta$, also die Spannung

$$s = 4\pi J\delta,$$

die Dichte also

$$\delta = \frac{s}{4\pi J}.$$

Also:

Man findet die Dichte innerhalb einer kleinen von Masse umgebenen und Masse umschließenden in sich geschlossenen Fläche mit fingierter Flächenbelegung von Dichte 1, indem man die Spannung, unter der sie steht, durch das 4π fache des Inhalts dividiert.

Dieser Satz ist namentlich für die Lehre vom Magnetismus und für die Elektrostatik von Bedeutung. Besonders bei den Influenzproblemen findet er Anwendung. Bei Influenzproblemen handelt es sich jedoch um Flächenbelegungen. Befindet sich im Innern der in sich geschlossenen Fläche, die z. B. die Gestalt einer Raumzelle haben kann, ein kleines Flächenstück F mit der Belegung m , deren mittlere Dichte δ ist, so ist zunächst $m = \delta F$, so daß jetzt die Spannung des Raums nur $s = 4\pi F\delta$ und die Dichte $\delta = \frac{s}{4\pi F}$ ist.

124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen. Auf der Oberfläche eines Konduktors sammle sich Elektrizität in dünner Schicht an, sei es in Folge von Ladung, oder von Influenz, oder infolge des Zusammenwirkens von Ladung und Influenz. Es herrsche Gleichgewicht der wirkenden Kräfte, so daß die Elektrizität in Ruhe ist. AB sei ein kleiner Teil der Oberfläche des Konduktors, die

selbst zu den Niveauflächen gehört, denn die wirkenden Kräfte müssen senkrecht gegen sie gerichtet sein, da sonst die elektrischen Teilchen sich nicht in Ruhe befinden könnten. $A_1B_1B_2A_2$ sei eine Raunzelle des Problems, A_1A_2 also eine von Kraftlinien gebildete Grenzfläche, ebenso B_1B_2 , dagegen seien A_1B_1 und A_2B_2 benachbarte Niveauflächen. Die auf der Fortsetzung der Konduktoroberfläche befindlichen elektrischen Belegungen, ebenso die etwa influenzierend wirkenden sonstigen elektrischen Massen befinden sich außerhalb der Zellen, geben also zur Spannung den Beitrag Null. Ist m die Masse der Belegung AB , so steht der Zellenraum nach Poisson unter der Spannung $4\pi m$. Man lasse nun A_1B_1 und A_2B_2 sehr nahe aneinander rücken, so daß die Dimensionen von A_1A_2 und B_1B_2 gegen die von AB , A_1B_1 und A_2B_2 vernachlässigt werden können. Die Gesamtwirkung der sämtlichen vorhandenen Elektrizitäten, der äußeren und inneren, auf jede Seitenfläche der Zelle giebt, da A_1A_2 und B_1B_2 Kraftlinien sind, keine nach innen oder aufsen gehenden Resultanten, diese fallen vielmehr in die Kraftlinien selbst. Also kommen nur die senkrecht gegen F_1 und F_2 gerichteten Einheitsresultanten p_1 und p_2 des Gesamtproblems zur Sprache. Diese mögen für F_1 nach innen, für F_2 nach aufsen gerichtet sein. Die verbleibende Spannung $p_1F_1 - p_2F_2$ muß nach Poisson gleich $4\pi m$ sein, d. h. gleich $4\pi F\delta$, was die Gleichung

$$p_1F_1 - p_2F_2 = 4\pi F\delta$$

giebt. Da aber A_1B_1 und A_2B_2 unendlich nahe aneinander gerückt sind, kann man $F_1 = F_2 = F$ setzen, so daß die Gleichung übergeht in

$$p_1 - p_2 = 4\pi\delta.$$

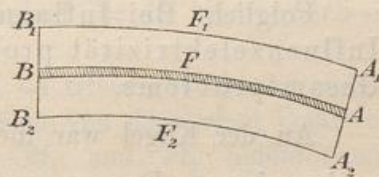
Daraus ergibt sich als Dichte der Belegung

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{4\pi}.$$

Die Dichte der Flächenbelegung ist also der Quotient aus der Differenz der Einheitsresultanten des Problems auf beiden Seiten der Belegung und der Zahl 4π . Nach Nr. 27 kann $p_1 - p_2$ z. B. beim Passieren einer Fläche endliche Werte annehmen, ebenso in den nachstehenden Fällen.

Liegt nun die Fläche F_2 in der leitenden Masse des Konduktors, so ist die auf sie pro Einheit der Belegung wirkende Resultante p_2 des Problems gleich Null, denn sonst würden dort noch scheidende

Fig. 94.



Kräfte wirken, während Ruhe vorausgesetzt ist. In diesem Falle also wird

$$\delta = \frac{p_1}{4\pi}$$

Jetzt also gilt der Satz:

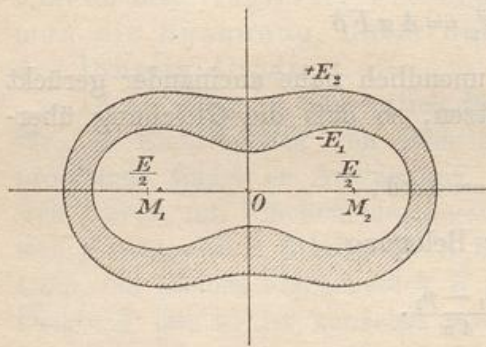
Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der elektrischen Belegung des Konduktors an jeder Stelle gleich dem Quotienten aus der dort auf die Einheit wirkenden Resultante des Gesamtproblems und der Größe 4π .

Folglich: Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der Influenzelektrizität proportional der Einheitsresultante des Gesamtproblems.

An der Kugel war die Richtigkeit des Gesetzes $\delta = \frac{p_1}{4\pi}$ bereits nachgewiesen. Das symmetrische Zweipunktproblem wird die Sache noch klarer erläutern.

125) Influenz auf den Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems. Ein metallischer Hohlkörper werde von zwei Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems begrenzt, also von zwei durch $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ charakterisierten Flächen. Man denke sich in den Punkten M_1 und M_2 die elektrische Masse $+E$ zu

Fig. 95.



gleichenden Teilen angebracht. Durch elektrische Scheidung sammelt sich an der Innenwand Influenzelektrizität $-E_1$, an der Außenwand $+E_2$ an. Wird der Leiter mit der Erde verbunden, so entflieht die letztere nach der Erde. Ist Gleichgewicht eingetreten, so herrscht innerhalb der Metallmasse die elektrische Scheidungskraft Null, d. h. das Potential ist konstant und zwar gleich dem der Erde, welches nach Nr. 60 als Null aufzufassen ist. Die $-E_1$ ordnet sich also an der Innenwand so an, daß die gesamte Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach außen hin gleich Null ist.

Daraus folgt zunächst, daß die Mengen $+E$ und $-E_1$ gleich groß sind. Wären nämlich die Mengen verschieden, so würde bei größerer Entfernung von einem gegenseitigen Aufheben der Wirkungen nicht die Rede sein, da für größere Entfernungen die Wirkung doch

so ist, als ob $+E$ und $-E_1$ im Schwerpunkt S , d. h. in O angebracht wären. Es ist also, abgesehen vom Vorzeichen, $E = E_1 = E_2$.

Zweitens folgt daraus, daß, wenn die Elektrizität $-E_1$ in derselben Anordnung festgehalten würde, die sie jetzt hat, z. B. in Form einer ponderablen Masse von derselben Dichtigkeitsverteilung, und wenn sie allein wirkte, ihre Wirkung nach aufsen genau so sein müßte, als ob sie zu gleichen Teilen in M_1 und M_2 angebracht wäre, denn sonst würde das gegenseitige Aufheben der Wirkungen unmöglich sein. Dieses Resultat ist von besonderer Wichtigkeit für die Newtonschen Anziehungsprobleme.

Drittens ist folgendes zu bemerken: da Gleichgewicht herrscht, muß jedes elektrische Teilchen der Innenfläche von sämtlichen Teilchen der Oberflächenelektrizität und den in M_1 und M_2 befindlichen Ladungen so abgestoßen bzw. angezogen werden, daß die Resultante senkrecht gegen die Innenwand gerichtet ist, da sonst Ruhe nicht eintreten würde. Nun ist aber die von M_1 und M_2 herrührende Teilresultante, da es sich um die Niveaufläche des Zweipunktproblems handelt, senkrecht gegen die Innenwand gerichtet, folglich muß die Resultante der Wirkungen, die von den Oberflächenteilchen der Elektrizität E_1 herrühren, ebenfalls senkrecht gegen die Innenwand gerichtet sein.

Die auf jedes Teilchen wirkende Gesamtresultante ist am stärksten für die an der Innenwand selbst liegenden Teilchen, sie nimmt aber nach aufsen hin schnell bis zur Null ab, denn an der äußersten Schicht der Innenbelegung heben die Gesamtwirkungen einander auf.

Würde man die Ladungen M_1 und M_2 entfernen, so würde die Oberflächenelektrizität keine seitlichen Verschiebungen erleiden, sondern überall in der Normalen der Niveaufläche nach aufsen eilen. Wäre also die Schale unendlich dünn (jedoch von zwei Niveauflächen der besprochenen Art begrenzt), so würde sich die Elektrizität statt an der Innenwand, an der Aufsenwand ansammeln und im übrigen an jeder Stelle dieselbe mittlere Dichte behalten haben, wie vorher, denn seitliche Verschiebungen konnten nicht stattfinden.

Dieser Zustand würde auch bestehen bleiben, wenn man jetzt den ganzen Hohlraum kontinuierlich mit leitender Masse anfüllen könnte. Folglich ist die Wirkung der an der Aufsenwand im Gleichgewicht befindlichen Elektrizität auf die Punkte des Innenraums gleich Null, das Potential also dort überall konstant. In der That würden Scheidungskräfte auftreten, wenn es anders wäre.

Daraus folgt, daß die vorliegende Anordnung der Elektrizität ein stabiles Gleichgewicht giebt. Also:

Wird ein Konduktor, dessen Oberfläche eine Niveau-

fläche des symmetrischen Zweipunktproblems ist, mit Elektrizität geladen, so ordnet sie sich ganz von selbst so an, daß im Gleichgewichtszustande die Wirkung nach außen genau so ist, als ob die Ladung zu gleichen Teilen in M_1 und M_2 angebracht wäre. Die Wirkung auf innere Punkte dagegen ist gleich Null.

Weil die Wirkung der so angeordneten Oberflächenladung nach innen gleich Null ist, war dies auch bei dem Anfangsproblem, wo $+E$ in M_1 und M_2 und $-E_1$ auf der inneren Fläche angesammelt war, der Fall. Jedes Teilchen an der eigentlichen Innenwand wird also nur von M_1 und M_2 angezogen, denn die Wirkung der Oberflächenteilchen nach innen ist Null. Die Resultante, die an den innersten Teilchen wirkt, ist also für die Einheit gleich der Resultante der anziehenden Elektrizitäten in M_1 und M_2 , also gleich der Resultante der in den Radien r_1 und r_2 wirkenden Kräfte $\frac{1}{2} \frac{E}{r_1^2}$ und $\frac{1}{2} \frac{E}{r_2^2}$. An den äußersten Teilchen der Schicht hingegen ist die Gesamresultante gleich Null.

Hier ist die Verteilung als eine schichtenweis erfolgte, d. h. als eine räumliche, betrachtet. Sieht man davon ab, d. h. faßt man sie als eine absolute Flächenbelegung (von unendlich geringer Höhe) auf, so ist nach Nr. 124 die Dichte der Belegung $\delta = \frac{p_1 - p_2}{4\pi}$, oder, da im Innenraume die Resultante p_2 des Gesamtproblems gleich Null ist, $\delta = \frac{p_1}{4\pi}$. Folglich:

Die Influenzladung $-E_1$ sammelt sich an der Innenwand so an, daß ihre Dichtigkeit an jeder Stelle proportional der von M_1 und M_2 ausgeübten Anziehungskraft ist. Es ist also $\delta : \delta_1 = p : p_1$, d. h. $\frac{\delta}{p}$ ist eine konstante Größe c_1 .

Hat man nun für das vorliegende Problem den Raum in potentiell gleichwertige Kraftröhren eingeteilt, und teilen diese die untersuchte Niveaufläche in zahlreiche Felder von variabler Größe ein, so sind die Flächen F umgekehrt proportional den Kräften, d. h. es ist $pF = c_2$, wo c_2 eine konstante Größe ist.

Aus $\frac{\delta}{p} = c_1$ und $pF = c_2$ folgt durch Multiplikation $\delta F = c_1 c_2 = c$, wo c eine neue Konstante ist. Hier bedeutet aber δF die auf jedem Felde aufgespeicherte Elektrizitätsmenge, und diese ist für alle Felder dieselbe Menge c . Folglich:

Die Influenzladung ordnet sich auf den potentiell gleichwertigen Feldern so an, daß auf jedem Felde dieselbe Menge liegt.

Für ponderable Massen gilt also folgender Schlufs:

Belegt man eine Niveaufläche des symmetrischen Zweipunktsystems so mit ponderabler Masse, dafs auf allen potentiell gleichwertigen Feldern des Problems gleich viel liegt, so wirkt — sehr grofse Zahl der Felder vorausgesetzt — die Belegung nach innen mit der Stärke Null, nach aufsen dagegen ebenso, als ob die Masse zu gleichen Teilen in den Punkten M_1 und M_2 angebracht wäre.

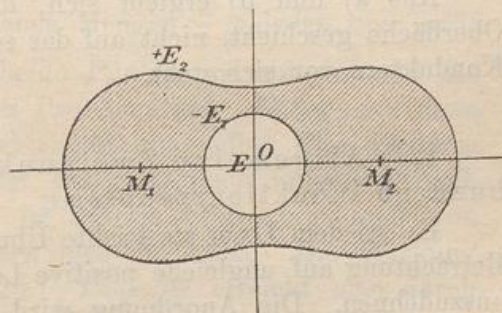
Dagegen würde die homogene Belegung einer solchen Niveaufläche nach aufsen und innen ganz anders wirken. (Nur bei der Kugelfläche ist die homogene Belegung in der Wirkung identisch mit der Mittelpunktsladung. Sie ist also ungeeignet zur Erläuterung der betreffenden Erscheinungen und Sätze.)

Angenommen nun, man hätte M_1 und M_2 ebenso wie vorher geladen, den Konduktor aber nicht abgeleitet, so würde die Influenzerscheinung sich folgendermassen entwickeln: Die in M_1 und M_2 gleichmäfsig verteilte Elektrizität $+E$ ruft auf der Innenfläche eine gleich grofse Menge von Influenzelektrizität $-E_1$ durch Scheidung hervor, eine ebenso grofse Menge $+E_2$ sammelt sich auf der Aufsenfläche an. Die Scheidung dauert so lange an, bis die Wirkungen der Ladungen in M_1 und M_2 einerseits und der Elektrizität $-E_1$ andererseits nach aufsen einander aufheben. Dies geschieht nur bei der früheren Anordnung. Demnach ordnet sich die Elektrizität $+E_2$ auf der Aufsenfläche so an, als ob die beiden andern gar nicht da wären, d. h. ebenfalls nach dem vorigen Gesetze. Die Wirkung nach aufsen ist so, als ob nur die Ladungen E oder nur die Belegung $+E_2$ vorhanden wäre. In der Masse des Konduktors ist die Wirkung gleich Null. Im Hohlraum wirken nur die Ladungen $+E$ in der gebräuchlichen Weise, die jede der beiden andern dort die Wirkung Null giebt.

126) Modifizierte Beispiele. Die Verhältnisse ändern sich, wenn die äufser Fläche einer andern Schar von Niveauflächen angehört, als die innere.

Beispiel a) Die Innenfläche des Konduktors sei eine Kugelfläche, die Aufsenfläche gehöre dem symmetrischen Zweipunktproblem an. Im gemeinschaftlichen Mittelpunkte O befinde sich die Ladung $+E$.

Fig. 96.

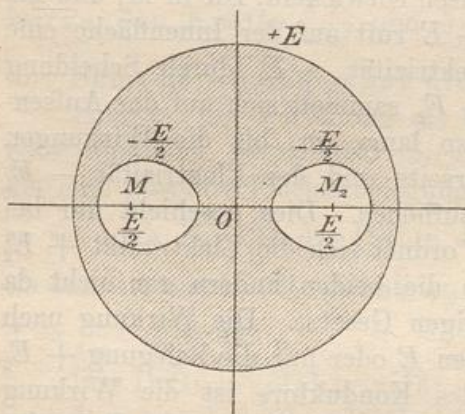


Auflösung. Die Ladung $+E$ ruft auf der Kugelfläche die gleich große Menge $-E_1$ hervor, die sich gleichmäßig verteilt, so daß die Wirkung beider nach außen gleich Null wird. Die gleich große Menge $+E_2$ sammelt sich auf der Außenfläche an und verteilt sich so, als ob die beiden andern nicht da wären, d. h. nach dem oben besprochenen Gesetze des Zweipunktproblems.

Die Wirkung nach außen wird so, als ob Ladungen $+\frac{E}{2}$ in M_1 und M_2 vorhanden wären. In der Masse des Konduktors ist die Wirkung gleich Null. Im Hohlraum wirkt nur die Ladung von O .

b) Die Ladungen $\frac{E}{2}$ befinden sich in M_1 und M_2 , der Konduktor wird innen von einer der Niveauflächen des Zweipunktproblems begrenzt (oder von zwei getrennten Ovalen), die Außenfläche sei eine Kugel mit O als Centrum.

Fig. 97.



Auflösung. Auf der Innenfläche geschieht die Ansammlung von $-E_1$ nach dem Gesetz des Zweipunktproblems, die Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach außen ist Null. Auf der Kugel sammelt sich $+E_2$ homogen verteilt an, als ob die beiden andern nicht da wären. Die Wirkung nach außen ist so, als ob $+E$ in O allein vorhanden wäre. Die Wirkung in der Masse des Konduktors ist Null. Die Wirkung im Hohlraum ist die des Zweipunktproblems für M_1 und M_2 .

Aus a) und b) ergibt sich, daß man von dem, was auf der Oberfläche geschieht, nicht auf das schließen darf, was im Innern des Konduktors vor sich geht.

127) Allgemeine Zweipunktprobleme und damit verbundene Induktionsprobleme.

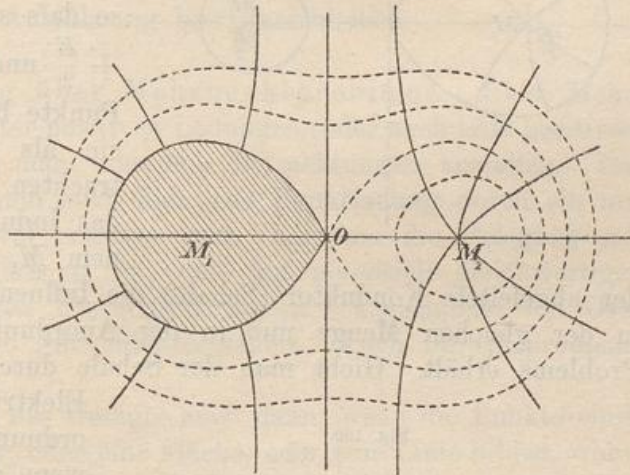
Es sei dem Leser als leichte Übung überlassen, die entsprechende Betrachtung auf ungleiche positive Ladungen der Punkte M_1 und M_2 auszudehnen. Die Anordnung wird stets so, daß man die Ladung beider Punkte durch die entsprechende Belegung jedes Ovals, welches beide umschließt, ersetzen kann, sobald es sich um die Wirkung nach außen handelt. An Stelle eines solchen Ovals können aber auch zwei zusammengehörige der getrennten Ovale eintreten, die bei gleichen

Ladungen symmetrisch sind. Endlich kann jeder einzelne der Punkte durch ein ihn umschliessendes Oval ersetzt werden.

In Fig. 98 ist dies beispielsweise so dargestellt, dafs die Ladung in M_1 durch eine ebenso grofse Ladung auf der einen Hälfte der durch O gehenden

Kurve ersetzt ist. Ohne die Mitwirkung von M_2 würde die Verteilung der Ladung auf der Konduktorfläche eine ganz andere werden. Bringt man aber nach M_2 dieselbe Ladung $+E$, so bilden sich beide Arten von Induktionselektrizität, an jeder Stelle heben die entgegengesetzten Elektrizitäten in glei-

Fig. 98.

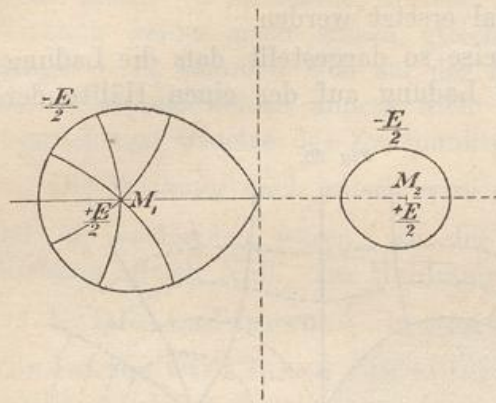


chen Quantitäten einander auf, gleichartige aber summieren sich, und so entsteht eine Anordnung, die genau der des ursprünglichen Zweipunktproblems entspricht. Man kann den einen Konduktor auch massiv machen, ohne dafs sich etwas ändert. Scheidende Kräfte treten eben im Innern nicht mehr auf. Die Wirkung der Ladung der Oberfläche und des Punktes M_2 zusammengenommen auf das Innere der Metallmasse ist gleich Null.

Statt die Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche abströmen zu lassen, kann man folgendes machen. Man denke sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen elektrischen Mengen $\frac{E}{2}$ geladen und beide von einer Schale umgeben, die beide Punkte umschliesst und die Gestalt einer der Niveauflächen des Problems hat. Ladet man diese mit $-E$, so ordnet sich die Elektrizität von selbst dem Problem entsprechend an. Die Wirkung der Belegung nach innen ist Null, die Kraftlinien und Niveauflächen im Innern werden nur noch von M_1 und M_2 hervorgebracht, bleiben also die alten. Die Wirkung nach aufsen ist Null. (Vgl. Nr. 125.) Dasselbe erreicht man durch Induktionwirkung von M_1 und M_2 auf die abgeleitete Schale.

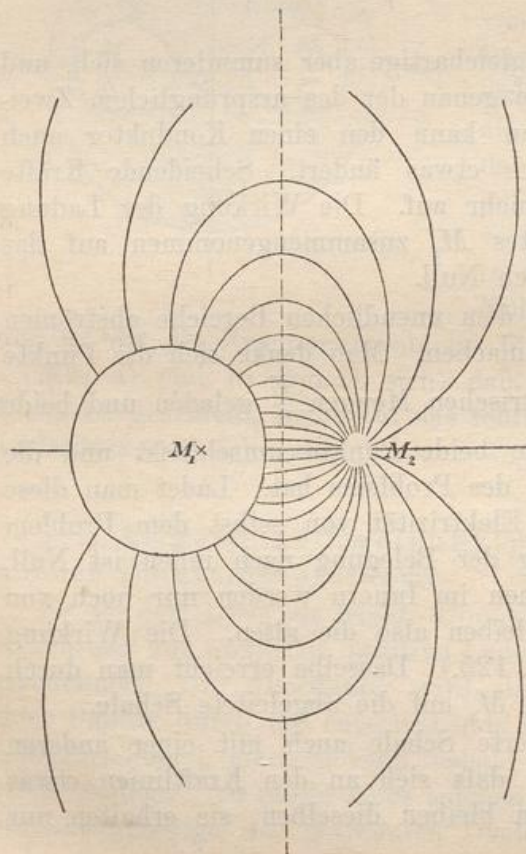
Man kann aber die isolierte Schale auch mit einer anderen Elektrizitätsmenge laden, ohne dafs sich an den Kraftlinien etwas ändert. Auch die Niveauflächen bleiben dieselben, sie erhalten nur andere Potentialwerte.

Fig. 99.



der abgeleitete Konduktor (Schale) die Influenzelektrizität erster Art in der gleichen Menge und in der Anordnung des ursprünglichen Problems erhält. Giebt man der Schale durch Ladung eine andere

Fig. 100.



Dasselbe erreicht man mit getrennten Ovalen, die jene Punkte umschließen. Sie brauchen nicht gleich zu sein. Läßt man nun das um M_2 gelegte unendlich klein werden, so daß sich dort die Ladungen $+\frac{E}{2}$ und $-\frac{E}{2}$ in demselben Punkte befinden, so kann man sie als nicht vorhanden betrachten. Dann stellt die Figur das Induktionsproblem dar, bei dem M_1 eine Ladung hat und der abgeleitete Konduktor (Schale) die Influenzelektrizität erster Art in der gleichen Menge und in der Anordnung des ursprünglichen Problems erhält. Giebt man der Schale durch Ladung eine andere Elektrizität, so bleibt die Anordnung nur dann dieselbe, wenn die gleiche Differenz im Punkte M_2 angebracht wird und influenzierend mitwirkt.

Diese Bemerkungen gestatten auch, den Fall entgegengesetzter Ladungen der Punkte M_1 und M_2 zu betrachten, bei dem Fig. 70 zur Geltung kommt.

Der Punkt M_1 mit Ladung $+E$ kann durch das ihn umschließende Oval mit der Ladung $+E$ ersetzt werden, ohne daß sich an den Kraftlinien etwas ändert. Das Oval kann auch in die Symmetrieebene übergehen, es kann auch ein solches werden, welches M_2 umschließt. Ob man die Ladung $+E$ giebt, oder den abgeleiteten Konduktor durch Influenz von M_2 aus ladet, ist gleichgültig.

Im Falle ungleicher Ladungen von M_1 und M_2 hat das Problem nicht die gezeichnete Symmetrieebene, wohl aber gehört nach Nr. 97 eine Kugel dazu. Das Problem der Influenz eines Punktes M_2 auf Ebene oder Kugel kann also an dieser Stelle ohne weiteres gelöst werden. Da dies jedoch von anderen Gesichtspunkten aus gelegentlich der elektrischen Bilder geschehen soll, deren Theorie hier schon vorbereitet ist, kann die Ausführung hier unterbleiben.

128) Bemerkung über Mehrpunktprobleme. Über Mehrpunktprobleme mit lauter positiven Ladungen (oder auch teils positiven, teils negativen) kann man dieselben Betrachtungen anstellen. Das Wichtigste ist, daß man auch hier jede Punktladung durch ein nur sie umschließendes Oval ersetzen kann, bei dem die Belegung mit derselben Masse so geregelt ist, daß auf potentiell gleichwertigen Feldern gleiche Mengen Elektrizität lagern. Umschließt ein Oval mehrere der Punkte, so gilt entsprechendes. Auch Influenzprobleme lassen sich behandeln.

Grundsätzlich gilt das Gesagte auch dann, wenn die Punkte einen kontinuierlichen Körper, oder eine Fläche, oder eine Linie bilden, wobei die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten konstant oder veränderlich sein kann. Kennt man also die Niveauflächen und Kraftlinien eines Anziehungsproblems, so kann man das Problem benutzen, aus ihm auf obigem Wege gewisse andere Probleme zu lösen. Auf cylindrische und zweidimensionale Probleme kommen wir noch ausführlicher zurück. Die Betrachtungen des 5. Kapitels bieten dem Leser zahlreiche Übungsbeispiele. Der Kürze halber sei das Gesamtergebn nur für positive Ladungen angegeben.

Ladet man einen Leiter, dessen Gestalt durch die Niveaufläche eines bekannten Anziehungsproblems bestimmt ist, mit Elektrizität, so ordnet sich diese so an, daß die Dichtigkeit der Flächenbelegung proportional den Einheitsresultanten des Anziehungsproblems für jede Stelle der Oberfläche ist, daß also auf den potentiell gleichwertigen Feldern gleich viel elektrische Masse liegt. Die Wirkung der so angeordneten Elektrizität nach Innen ist gleich Null. Die Wirkung nach außen entspricht der der Kernladungen.

Wird der Leiter durch zwei Niveauflächen des Problems begrenzt und giebt man den Kernpunkten ihre Ladung, so ordnen sich die beiden Influenzelektrizitäten auf den Oberflächen nach dem obigen Gesetze an.

Ladet man zwei dünne Schalen, die nach Gestalt und Lage mit zwei Niveauflächen des Anziehungsproblems zusammenfallen, mit gleichartigen oder ungleichartigen Elek-

trizitäten, so ordnet sich jede der beiden so an, als ob die andere gar nicht vorhanden wäre.

Denkt man sich um die geladene Kernmasse eines Anziehungsproblems eine in sich geschlossene dünne Schale, die nicht zu den Niveauflächen des Systems gehört und leitet man sie nach der Erde ab, so ordnet sich die Influenzelektrizität erster Art so an, daß die gesamte Wirkung nach außen gleich Null ist, denn in der Masse des Leiters herrscht das konstante Potential der Erde (Null). Denkt man sich auf der Schale eine ponderable Massenbelegung, deren Dichtigkeit der der Elektrizität entspricht, so wirkt diese Belegung nach außen ebenso, wie die Kernmassen.

So erkennt man die Richtigkeit des folgenden wichtigen Satzes von Green:

Auf jeder beliebigen in sich geschlossenen Fläche, die eine gegebene kontinuierliche oder diskontinuierliche Massenverteilung umschließt, läßt sich ponderable Masse so verteilen, daß die Wirkung nach außen dieselbe ist, wie die der inneren Massen.

So läßt sich z. B. auf der Kugelfläche Masse so verteilen, daß sie nach außen ebenso wirkt, wie beliebig viele Massen m_1, m_2, m_3, \dots in ihrem Innern. Ferner läßt sich auf jeder geschlossenen Niveaufläche eines beliebigen Punktproblems Masse so verteilen, daß sie nach außen wirkt, wie ein beliebiger Punkt im Innern. Für unendliche Entfernung sind die anziehenden Kräfte der einzelnen Teilchen parallel, die Resultante aber ist nach jenem Punkte hin gerichtet. Dieser Punkt ist wegen des Parallelismus der Kräfte der Schwerpunkt der Belegung. Man nennt eine solche Belegung eine centrobarische. Beispiele sollen in einem besonderen Kapitel gegeben werden.

Für den Greenschen Satz ist hier nur eine Art von Anschauungsbeweis gegeben. Der Existenzbeweis für die durch jene Belegung repräsentierte Funktion ist analytisch nur schwierig zu führen. Man kann also die obigen Betrachtungen als eine vorbereitende Einführung in wichtige Fragen der Funktionentheorie betrachten. Die folgenden Kapitel werden noch weiteren Einblick in die Folgerungen der Sätze von Laplace und Poisson geben.

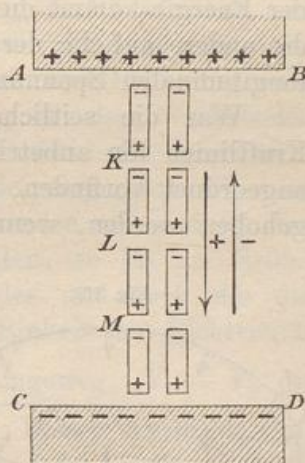
129) Bemerkungen zur Theorie der Kraftlinien und der elektrischen Verschiebung. In Nr. 59 war gezeigt, in welcher Weise eine Ladung $+E$ des Leiters AB nach Faradays Ansicht die Polarisierung der längs der Kraftlinien angeordneten Moleküle hervorbringt. Dieselbe erfolgt schrittweise mit endlicher Geschwindigkeit. Sie setzt sich nach dem unendlichen Bereiche hin fort, wenn

die Kraftlinie nicht auf einen anderen Leiter trifft. Geschieht aber letzteres, so tritt auf dem zweiten Leiter Scheidung der Elektrizitäten ein. Enden sämtliche Kraftröhren in diesem, so ist die Influenz-elektrizität erster Art auf ihm von derselben Menge, wie die Ladung, nur entgegengesetzt. Endet nur der n^{te} Teil der Kraftröhren in ihm, so ist sie von der Menge $-\frac{1}{n} E$. Am Anfang und Schluss jeder

Kraftröhre liegt auf beiden Leitern dieselbe Menge entgegengesetzter Elektrizitäten. Auf den Molekülen des Dielektrikums befinden sich entsprechende Quantitäten, und zwar sind diese auf jedem Teilchen nach den Endflächen hin zusammengedrängt. Es hat sich also in jedem Teilchen eine Verschiebung der positiven Elektrizitäten im Sinne des einen Pfeils, eine solche der negativen in der des andern Pfeils vollzogen. Fernwirkungen finden nicht statt, denn die entgegengesetzten Elektrizitäten zweier Nachbarmoleküle liegen so nahe beisammen, daß ihre Wirkungen auf größere Entfernungen hin sich gegenseitig aufheben (neutralisieren) würden. Die an den Schlussstellen der Kraftlinie im Dielektrikum liegenden scheinbar freien Elektrizitäten sind, wie bei einem Kondensator, durch die des benachbarten Leiters gebunden.

Dagegen findet zwischen den unmittelbar beieinander liegenden entgegengesetzten Elektrizitäten Anziehung, zwischen den gleichartigen Abstosung statt. Die Anziehungen wirken longitudinal und sind bestrebt, die Kraftlinie zu verkürzen. Dieses Bestreben ruft eine gegenseitige Annäherung der beiden Leiter hervor, wenn diese beweglich sind. Wird diese Annäherung gehemmt, so erleidet die Kraftlinie eine longitudinale Zugspannung. Soll Gleichgewicht herrschen, so sind gleich große Gegenkräfte nötig. Diese Gegenkräfte kann man sich aus einem Bestreben des Dielektrikums erklären, die verschobenen Teilchen in die alte Lage zurückzuzwingen. Ist dies der Fall, so war bei der Verschiebung dieser Widerstand zu überwinden, d. h. eine Verschiebungsarbeit zu leisten. Diese Arbeit kann nur dadurch herbeigeführt sein, daß man dem einen Leiter, z. B. AB durch die Ladung eine potentielle Energie verliehen hat, der Kugel z. B. die Energie $\frac{E^2}{2r}$, dem allgemein gestalteten Konduktor die Energie $\frac{V}{2} E$. (Ist nämlich V das Potential der Ladung am

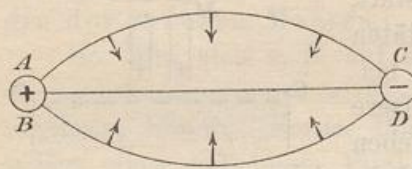
Fig. 101.



Schluss, so ist sein Mittelwert, da der Anfangswert 0 war, gleich $\frac{V}{2}$ zu setzen. Dies ist der mittlere Arbeitswert dafür, die Einheit aus unendlicher Entfernung auf den Konduktor zu schaffen. Für die Ladung E ist also die Arbeit $\frac{V}{2} E$ nötig. Sie ist gleich dem Selbstpotential der Belegung. Für die Kugelfläche erhält man $\frac{E}{2r} E = \frac{E^2}{2r}$. Ist die Energie erschöpft, so hört das Verschieben auf. Von der Energie kommt die eine Hälfte auf die Verschiebung der positiven, die andere auf die der negativen Elektrizität. Die Angelegenheit der longitudinalen Spannungen wäre dadurch erledigt.

Was die seitlichen Abstofsungskräfte nach den benachbarten Kraftlinien hin anbetrifft, die sich z. B. cylindrisch um jede derselben angeordnet vorfinden, so müssen auch diese durch Gegenkräfte aufgehoben werden, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es fragt sich,

Fig. 102.



worin diese Gegenkräfte ihren Ursprung haben. In Fig. 102 seien die Leiter zwei Kugeln. Drei der Kraftlinien sind angedeutet. Angenommen, die äusseren würden verkürzt, so würden sie nach innen rücken, wie es die Pfeile andeuten. Aus dem der Polarisation entspringenden Verkürzungsbestreben folgt also ein Teil des Drucks der äusseren Kraftröhren gegen die inneren. Dazu kommt noch die abstofsende Wirkung der nach aussen folgenden Kraftlinien. Da bald Gleichgewicht eintritt, müssen die so entstandenen äusseren Kräfte den inneren Abstofsungskräften das Gleichgewicht halten. Ist das Mittel ein isotropes, so werden die Abstände der $+$ von den benachbarten $+$ ebenso gross sein, wie die der $+$ von den benachbarten $-$, es steht also zu vermuten, dass die abstofsenden seitlichen Kräfte ebenso gross sind, wie die anziehenden longitudinalen. Ein strenger Elementarbeweis für diese Behauptung Faradays ist mir nicht bekannt. Hier kann er entbehrt werden.

Wird der Gleichgewichtszustand irgendwie, z. B. durch Annäherung eines geladenen Konduktors, gestört, so nehmen die Kraftlinien andere Gestalt an. Entfernt man die störende Ladung wieder, so stellen die besprochenen Anziehungs- und Abstofsungskräfte den ursprünglichen Zustand wieder her. Die Kraftlinien verhalten sich wie elastische Fäden, für die sich eine besondere Kinematik ausbauen lässt.

Faraday nannte den Zustand des polarisierten Dielektrikums einen Zwangszustand, weil dieser aufhört, sobald die Ladung des

Leiters AB entfernt oder durch eine gleich große entgegengesetzte Ladung neutralisiert wird. Die longitudinalen Gegenspannungen ziehen dann die Elektrizitäten in die alte Lage zurück. Die den Elektrizitäten durch die Verschiebung verliehene potentielle Energie wird jetzt frei und setzt sich z. B. in Wärme um.

Maxwell verglich die elektrische Verschiebung mit einer wirklichen elektrischen Strömung für eine geringe Strecke. Um in das Verständnis seiner Anschauungen einzudringen, verzichtete man für den Augenblick auf die molekulare Einteilung der Kraftröhre und fasse das Dielektrikum als kontinuierlich auf. Ihm ist also das Dielektrikum eine Art von Leiter, in dem sich eine Strömung vollziehen kann, jedoch erreicht die Verschiebung bei dem wachsenden Widerstande bald ihre Grenze, dann nämlich, sobald die dem Leiter mit der Ladung gegebene potentielle Energie aufgezehrt ist. Da durch die longitudinalen Spannungen die anziehenden und abstofsenden Kräfte der Ladung genau ersetzt werden sollen, so ist die Größe der Spannung und damit die des Widerstandes und auch die der abstofsenden Kräfte bekannt, nämlich für die Einheit der Elektrizität gleich $\frac{V_1 - V_2}{w}$, wo w ein kleiner Verschiebungsweg, $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz an seinen Endpunkten ist. Dieser Ausdruck gilt aber nur für die Luft als Dielektrikum. Für jedes andere handelt es sich um

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w}.$$

Die für die Einheit zu leistende Verschiebungsarbeit aber ist

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w} \cdot w = \frac{V_1 - V_2}{D}.$$

Nach Analogie der elektrischen Strömung geht nun, wie Maxwell annimmt, durch jeden Querschnitt der Kraftröhre eine elektrische Einheit, sobald eine solche durch einen der Querschnitte geht. Die benachbarte Einheit erfordert z. B. die Arbeit $\frac{V_2 - V_3}{D}$. Beide Einheiten zusammen erfordern also die Arbeit

$$\frac{V_1 - V_2}{D} + \frac{V_2 - V_3}{D} = \frac{V_1 - V_3}{D},$$

d. h. soviel, als ob die eine Einheit um beide Wege verschoben wäre. Ist demnach das Potential des Leiters AB an der Berührungsstelle gleich V_A , das des Leiters CD an der Berührungsstelle gleich V_B , so ist die Arbeit für die Verschiebung je einer Einheit durch jede Niveaufläche im ganzen gleich $\frac{V_A - V_B}{D}$, d. h. ebenso groß,

als ob die erste der betrachteten Einheiten den ganzen Weg passiert hätte.

Erstreckt sich aber das Dielektrikum bis ins Unendliche, so ist dort V_B gleich Null. Geht also jetzt ebenfalls bei der Verschiebung durch jeden Querschnitt die elektrische Menge 1, so ist die Verschiebungsarbeit gleich $\frac{V_A}{D}$. Die Verschiebungen sind dabei von verschiedener Größe. Sie sind umgekehrt proportional den Abständen von Niveaufläche zu Niveaufläche, gehorchen also dem Gesetze $pw = p_1 w_1$, oder $p : p_1 = w_1 : w$, ebenso dem Gesetze $pF = p_1 F_1$, denn durch jeden Querschnitt soll gleich viel fließen. Die Arbeit für die positive elektrische Einheit ist von der berechneten Größe, ebenso groß ist sie für die negative, beide zusammen erfordern die Arbeit $2 \frac{V_A}{D}$. Die hydrodynamischen Analogien bleiben erhalten.

Handelt es sich z. B. um eine geladene Kugel im unbegrenzten Dielektrikum, so ist die Arbeit für beide Einheitsverschiebungen gleich $\frac{2}{D} \frac{E}{r}$. Fließt aber in der Kraftrohre, die an der Kugel den Querschnitt 1 hat, nach jeder Richtung die Menge $\frac{\epsilon_1}{2}$, so ist die Arbeit für beides gleich $\frac{2}{D} \frac{E}{r} \frac{\epsilon_1}{2}$. Durch die ganze Kugelfläche fließt dann das $4r^2\pi$ fache von ϵ , die Arbeit ist also gleich

$$\frac{2}{D} \frac{E}{r} 4r^2\pi \frac{\epsilon}{2} = \frac{4r^2\pi E\epsilon}{Dr}.$$

Diese muß gleich der potentiellen Energie der Ladung sein, d. h. gleich $\frac{VE}{2D}$ oder $\frac{E^2}{2Dr}$ sein, d. h. es muß sein $8r^2\pi\epsilon = E$, d. h. die im Dielektrikum nach beiden Richtungen verschobene Elektrizitätsmenge ist ebenso groß, wie die Ladung E .

Dasselbe gilt von der Ladung beliebig gestalteter Konduktoren.

So war Maxwell berechtigt, die Größe der elektrischen Verschiebung gleich der der Ladung E zu setzen. So lag es zugleich nahe, nur von einer elektrischen Verschiebung E durch jede Niveaufläche zu sprechen, statt von einer Ladung E des Leiters. Das Hervorbringen einer elektrischen Verschiebung E im Dielektrikum ersetzt den Begriff der Ladung, erst der neue Zustand des Dielektrikums influenziert beide Leiter bis zur Ladung $\pm E$. Dadurch kam vollständige Symmetrie der Auffassung bezüglich der beiden Leiter zustande, die Hauptaktion aber wurde ganz in das Dielektrikum verlegt.

Was Faraday in unbestimmter Weise als Kraftfluß bezeichnet hatte, wurde so durch Maxwell als elektrische Verschiebung

mit mathematischer Schärfe formuliert, die Theorie der Fernwirkung aber dabei ganz entbehrlich gemacht. An Stelle des früher behandelten Begriffs der Spannung innerhalb einer Zelle, deren Wände für jede Flächeneinheit mit der Masse 1 belegt waren, trat so die elektrische Verschiebung. War die Spannung nach Laplace gleich Null, so ist hier die Änderung des Zelleninhalts durch den Kraftzufluß und -abfluß Faradays, durch den Elektrizitätsaus- und -eintritt Maxwells, gleich Null. War die Spannung nach Poisson $4\pi E$, so ist hier die Vermehrung des elektrischen Inhalts der Zelle gleich $4\pi E$.

Die longitudinalen und lateralen Gegenspannungen im Dielektrikum sind, wie schon in Nr. 59 angedeutet wurde, ganz analog den elastischen Gegenspannungen innerhalb eines auf Zug beanspruchten Stabes. Dort nimmt an jeder Stelle die Größe der Gegenspannung zu mit der Verschiebung λ , die ihrerseits proportional der Beanspruchung S ist, d. h. man hat $\lambda : \lambda_1 = S : S_1$. Dem entspricht hier die Zunahme der elektrischen Verschiebung mit der Ladung E . Die Verschiebungsarbeit ist in beiden Fällen proportional dem Quadrate von S bzw. E . Ist die Stablänge gleich 1, so ergibt sich der Elastizitätsmodul \mathfrak{E} aus der Proportion $\lambda : 1 = S : \mathfrak{E}$, d. h. er ist

$$\mathfrak{E} = \frac{S}{\lambda} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Verlängerung}}$$

Ebenso bezeichnet Maxwell den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \frac{V_1 - V_2}{E} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{elektrische Verschiebung}}$$

als den elektrischen Elastizitätskoeffizienten des Dielektrikums. Die Proportionen der Elastizitätslehre gelten nur innerhalb der sogenannten Elastizitätsgrenze. Wird der sogenannte Tragmodul überschritten, so wird das innere Gefüge des Materials durch bleibende Deformationen verdorben, bei weiterer Beanspruchung erlahmt die Widerstandsfähigkeit und die Überlastung führt zum Bruch. Ähnliches geschieht hier beim Übertreiben der Ladung E des Leiters bzw. beim Übertreiben der elektrischen Verschiebung. Wird eine gewisse Grenze überschritten, so erlahmt der Widerstand des Dielektrikums und es erfolgt ein gewaltsames Überströmen der Elektrizitäten in Form eines elektrischen Funkens.

Mit jeder Verlängerung eines Stabes ist eine seitliche Kontraktion desselben verbunden, die der Verlängerung proportional ist. Der Elastizitätsmodul gegen Druck ist derselbe, wie gegen Zug. [Die Tragmoduln können, wie beim Schmiedeeisen, für Druck und Zug dieselben, oder, wie beim Gufseisen, für Zug und Druck verschieden sein.] Die Vereinigung von lateraler Kontraktion und longitudinaler

Ausdehnung entspricht den beiden Arten von Gegenspannungen im Dielektrikum.

Ebenso wenig wie es unüberwindliche Festigkeit und vollkommene Elastizität giebt, ebenso wenig giebt es ein vollkommen isolierendes Dielektrikum. Im Laufe der Zeit tritt bei jeder Ladung eine allmähliche Entladung ein, bei jeder elektrischen Verschiebung also ein allmähliches Zurückziehen der Teilchen in die alte Lage, wobei sich die frei werdende potentielle Energie in Wärme umsetzen kann. Der Spannungszustand also erlahmt allmählich und die Gegenspannungen siegen über die Beanspruchung. Die ältere Auffassung erklärt dies durch ein allmähliches Eindringen der Influenz in das Dielektrikum, wodurch eine schrittweise Neutralisierung eingeleitet wird. Andere Analogien werden in den physikalischen Lehrbüchern besprochen.

Zur Würdigung der Maxwellschen Auffassung ist folgendes zu sagen. Zunächst handelt es sich nur um eine neue Ausdrucksweise, um eine andere Sprache für die Deutung der Erscheinungen. Maxwell selbst hat zugegeben, das eigentliche Wesen des Spannungszustandes habe er nicht ergründet, dieser zweite Schritt sei ihm nicht gelungen. Er hat aber im Anschluß an Faraday den Vorgang in das Dielektrikum verlegt, während die ältere Theorie nur von Fernwirkungen sprach, die vom Leiter ausgingen und manches unerklärt ließen. Insbesondere kannte die ältere Theorie nichts von einem Zwangszustande des im luftleeren Raume befindlichen Äthers, bei dem es sich ebenfalls um Energieaufspeicherung durch elektrische Verschiebung handelt. Maxwell hat gerade dem Zwangszustande des Äthers besondere Arbeiten gewidmet. Bedeutungsvoll konnte aber seine Auffassung erst in dem Augenblicke werden, der uns über die Frage der Geschwindigkeit aufklärte, mit der die elektrischen Wirkungen sich verbreiten, denn diese konnte bei den Fernwirkungen als unendlich groß angesehen werden. Diese Frage ist erst durch die Hertz'schen Versuche endgültig entschieden worden und zwar dahin, daß die Geschwindigkeit, mit der die elektrischen Wellen im luftleeren Raume vorwärtsschreiten, etwa die des Lichtes ist, wie es Faraday geahnt und Maxwell mit Bestimmtheit vorausgesagt hatte. Diese Wellen sind häufig der Reflexion, der Brechung, der Interferenz und Polarisation unterworfen, und nach Helmholtz sind sie wahrscheinlich als Transversalwellen aufzufassen. Zwischen den Wellenlängen der strahlenden Wärme und des Schalles bestand bisher eine große Kluft. Diese ist durch das Einschalten der elektrischen Wellen überbrückt worden. Ein weiterer Erfolg lag in der jetzt beginnenden Anerkennung der von Maxwell aufgebauten elektromagnetischen Lichttheorie.

Nach alledem scheint es, als ob die Maxwellsche Auffassung vor der früheren den Vorzug verdiente. Sie erweckt

die Hoffnung, daß wir einer einheitlichen Theorie der physikalischen Erscheinungen entgegengehen. Die Frage kann nur sein, ob man die Theorie der Fernwirkungen beibehalten und sie mit gewissen unentbehrlichen Maxwellschen Anschauungen verquicken will, oder ob man einheitlich nach Maxwell arbeiten soll. Zwar erheben sich noch Stimmen gegen das letztere, aber der Sieg Maxwells scheint bereits gesichert zu sein.

Da die Theorie der Schwingungen an dieser Stelle der elementaren Behandlung noch nicht zugänglich erscheint, soll hier mit den entsprechenden Betrachtungen abgebrochen werden. Für Kenner der höheren Analysis sei neben Maxwells Originalarbeiten und Maxwell-Weinstein folgende Litteratur angegeben:

Föppl: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig bei B. G. Teubner.

Föppl: Die Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig bei B. G. Teubner.

Maxwell-Boltzmann: Über Faradays Kraftlinien, Ostwaldsche Klassikerausgabe.

Helmholtz: Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Hamburg-Leipzig bei Voss.

Helmholtz: Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I Leipzig bei Barth.

Dagegen hält an der Theorie der Fernwirkungen besonders fest und stellt sich den neueren Anschauungen kritisch gegenüber

Dr. C. Neumann: Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Wirkungen. Leipzig bei Teubner. Auf seine Einleitung und die Einwände gegen Hertz auf S. 247 bis 251 sei besonders aufmerksam gemacht.

Die Hertzschen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft sind im Jahre 1892 bei Ambr. Barth (Leipzig) erschienen. Nach Hertz ist das Wesen der Elektrizität weder durch Maxwell noch durch die Schwingungen ergründet. Hertz betrachtet seine Theorie lediglich als einen Weg, auf die Maxwellschen Gleichungen zu gelangen. Das Obige kann selbstverständlich nur als eine vorläufige Einführung in die neueren Anschauungen betrachtet werden.

Noch könnte die Frage aufgeworfen werden, ob sich zwei benachbarte Kraftlinien nicht auch gegenseitig anziehen können. Die Vorzeichenvertauschung in der einen der in Fig. 101 gezeichneten Kraftlinien reicht hin, die Frage zu beantworten. Da jetzt entgegengesetzte Elektrizitäten nebeneinander liegen, findet Anziehung statt. In einem späteren Kapitel wird sich zeigen, daß die Kraftlinien

paralleler Magnetstäbe abstossend aufeinander einwirken, wenn gleichnamige Pole nebeneinander liegen, daß aber Anziehung der Linien stattfindet, wenn man die Pole des einen vertauscht. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Benachbarte Kraftlinien stoßen einander ab, wenn sie gleich gerichtet sind. Diese Ausdrucksweise ist aber nur eine sinnbildliche, denn sie bezieht sich auf die polarisierten Moleküle.

Erinnert man sich ferner, daß, je mehr sich die Kraftlinien und Niveauflächen aneinander drängen, um so größer die Stärke der elektrischen Kraftwirkungen ist, so erkennt man, daß beide Sätze zusammen die bequemste Ausdrucksweise zum Beschreiben der Probleme geben, daß man aus den Figuren ohne weiteres ablesen kann, was man wissen will. Es ist zu empfehlen, die schon besprochenen Systeme von Kraftlinien und Niveaulinien von diesem Gesichtspunkte aus noch einmal zu betrachten und mit jeder kommenden Figur ein gleiches zu thun. Man kann sich die Kraftlinien als vollkommen elastische Drahtfäden vorstellen, die bei jeder Störung des im Dielektrikum bestehenden Gleichgewichtes auf das empfindlichste den Zug- und Druckbeanspruchungen nachgeben, sich biegen oder strecken, sich drehen und sich dabei in charakteristischer Weise deformieren, so daß sich eine förmliche Kinematik der Kraftlinien aufbauen ließe. Auch bei den Hertz'schen Wellen, die auf Seite 156 und 157 seiner „Untersuchungen“ gezeichnet sind, handelt es sich um Kinematik der Kraftlinien, die sich so als wesentlicher Bestandteil der neueren Anschauungen herausstellt.

An einigen drei- und zweidimensionalen Problemen soll dies erläutert werden. Wirft man einen Stein ins Wasser, so quellen die bekannten Wellenkreise aus der Wurfstelle hervor. Dasselbe geschieht bei kontinuierlich zunehmender positiver Ladung eines allein im Raume befindlichen Konduktors mit den entsprechenden Niveauflächen. Neue und neue Niveauflächen quellen hervor und wandern, den Gesetzen des Zellenetzes folgend, konzentrisch anschwellend dem unendlichen Bereiche zu. Nur findet der Unterschied statt, daß auch die Abstände zwischen den Niveaulinien anschwellen. Wird ein cylindrischer Draht geladen, so handelt es sich um cylindrische Flächen, die sich nach dem Gesetz der quadratischen Einteilung des Normalschnitts durch Polarkoordinaten anordnen.

Da eine geladene Kugel sich im Laufe der Zeit entladet, so findet auch die entgegengesetzte Erscheinung, das allmähliche Zusammenziehen der Niveaulinien statt. Bei dem Vertauschungsproblem des letzteren Falles finden Erscheinungen statt, die sich der Leser selbst zurechtlegen möge. Dabei ist jedoch einige Vorsicht nötig.

Werden zwei Kugeln in übereinstimmender Weise allmählich geladen, so quellen zunächst konzentrische Kugelflächen hervor, die sich an den einander zugekehrten Stellen zuspitzen, als ob sie einander anzögen, schliesslich berühren sich die Spitzen, die beiden Ovale vereinigen sich zu einer zunächst eingebuchteten Fläche, schwellen weiter an und werden zu Kugeln. Hat die Kugel die Ladung E , und bringt man eine zweite Ladung E heran, so krümmen sich die geraden Kraftlinien nach der in Fig. 66 angegebenen Form und schränken sich auf eine Halbebene ein. Im Momente des Zusammenfallens beider Ladungen erhält man ein Strahlenbüschel von doppelter Sektorenzahl. Nähert man eine dritte Ladung E , so wird Fig. 72 maßgebend, und schliesslich hat man ein Strahlenbüschel von dreifacher Mächtigkeit. Der Vorgang der Ladung erhält so eine vollständig klare mathematische Deutung. Das Entgegengesetzte geschieht bei allmählicher Entladung. Das Hervorquellen oder Einschrumpfen im Falle der Ladung oder Entladung paralleler geradliniger Drähte führt auf lemniskatische Cylinder als Niveauflächen. Das Verhalten der Lemniskaten im Normalschnitt entspricht ganz dem der lemniskatischen Farbenringe, die bei der Drehung einer Platte aus doppeltbrechendem Material im Polarisationsapparate beobachtet werden. Man vergleiche dazu das Kapitel über „Lemniskatische Kinematik“ in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“.

Handelt es sich um zwei parallele gleichgeladene Drähte, von denen der eine im Endlichen, der andere in sehr grosser Entfernung liegt, so zeigt der erstere im Normalschnitt zunächst konzentrische Kreise und Radien. Nähert man den zweiten, so spitzen sich die Kreise zu lemniskatischen Kurven zu, die Strahlen aber krümmen sich zu Hyperbeln um. Sie werden dabei auf die durch die Symmetrielinien des Problems begrenzte Halbebene eingeschränkt. Entfernt man den genäherten Draht wieder, so strecken sich die Hyperbeln wieder in die geradlinige Form, die lemniskatischen Ovale aber werden wieder zu Kreisen.

Sind die Drähte entgegengesetzt geladen, so findet ganz anderes statt. Bei Annäherung des zweiten werden die konzentrischen Kreise des Normalschnitts gewissermassen abgestossen und auf die besprochene Halbebene eingeschränkt. Sie bilden eine Steinersche Kreisschar. Die Strahlen aber krümmen sich einander entgegen, als ob sie sich anzögen, und je zwei bilden einen Kreisbogen, sämtliche ein Kreisbüschel.

Gerade an diesen zweidimensionalen Problemen mit ihren auch dem Anfänger geläufigeren Kurven läßt sich diese Art von Kinematik sehr einfach erläutern, besser als an den dreidimensionalen Problemen.

Sämtliche Kurvenscharen, die in der „Einführung“ gezeichnet sind, lassen sich in solcher Weise behandeln und bieten Beispiele

auch für die kompliziertesten Fälle der Punkt- und Linienprobleme. Dafs alles auch elektromagnetisch gedeutet werden kann, soll später gezeigt werden.

So giebt der Satz, dafs benachbarte und gleich gerichtete Kraftlinien einander abstofsen und entgegengesetzt gerichtete einander anziehen, nicht nur eine unbestimmte Vorstellung, sondern alles läfst eine streng mathematische Formulierung und bestimmte geometrische Darstellung zu. Die Kraftlinien und Niveauflächen sind nicht etwas Starres, wie die Gebilde der Euklidischen Geometrie, sondern etwas leicht Bewegliches, in unaufhörlicher Umgestaltung Begriffenes, wie die „lebendigen“ Gebilde der synthetischen Geometrie. Die unbestimmten Vorstellungen Faradays sind so in ein klares Licht gestellt, und man erkennt, dafs auch die Maxwell'schen Vorstellungen und seine mathematischen Formulierungen einer elementaren Behandlung fähig sind. Dafs allerdings der Kenner der höheren Analysis, wie auch die „Einführung“ zeigt, noch weiter vordringen kann, ist selbstverständlich.