Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

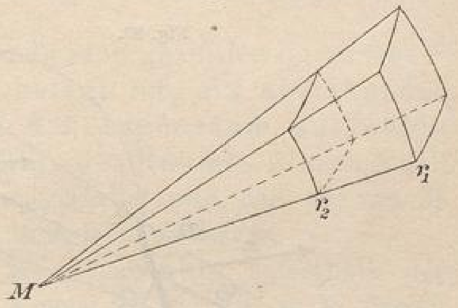
105) Begriff der Spannung eines Zellenraumes

Kapitel VI.

Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen.

105) Begriff der Spannung. In dem festen Punkte M befinde sich die anziehende Masse 1, deren Niveauflächen koncentrische Kugeln sind, während Kugelflächen und Meridianschnitte die Zelleneinteilung des Raums vollenden. Eine solche Zelle ist in der Figur dargestellt.

Fig. 82.



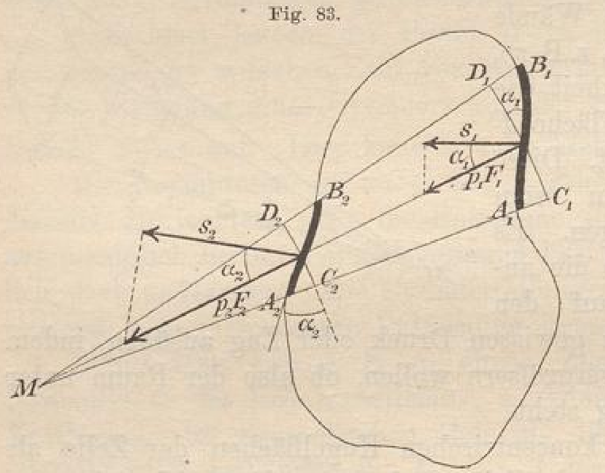
Man denke sich ihre Wände homogen mit Masse belegt, z. B. so, daſs auf jeder Flächeneinheit die Masse 1, also auf jeder Fläche F die Masse F angebracht ist. Diese Massenbelegungen werden vom Massenpunkte M angezogen. Es soll untersucht werden, ob die angezogenen Belegungen auf den Innenraum der Zelle einen gewissen Druck oder Zug ausüben, indem sie ihn verkleinern oder vergröſsern wollen, ob also der Raum unter einer gewissen Spannung steht.

Bezeichnet man die koncentrischen Kugelflächen der Zelle als Grundflächen, die übrigen als Seitenflächen, so läſst sich folgendes sagen. Die Belegungen der Seitenflächen werden lediglich nach M hingezogen, die an den einzelnen Teilchen wirkenden Kräfte liegen also in den Flächen selbst und haben keine Komponenten, die den Innenraum vergröſsern oder verkleinern könnten. Anders ist es bei den Grundflächen F_1 und F_2, die um r_1 bezw. r_2 von M entfernt sind. Die eine übt auf den Innenraum einen Druck $\frac{F_1}{r_1^2}$ aus, der als eine positive Spannung bezeichnet werden soll, der zweite einen Zug $\frac{F_2}{r_2^2}$, der als negative Spannung gelten soll. Die eine Kraft will den Zellenraum vergröfsern, die andere ihn verkleinern. Da aber $F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2$ ist, so folgt $\frac{F_1}{r_1^2} - \frac{F_2}{r_2^2} = 0$. Druck und Zug heben sich gegenseitig auf, so dafs man sagen kann: Der Zellenraum steht unter der Spannung Null. Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn die ähnlichen Grundflächen irgend eine andere Gestalt hätten, wenn z. B. ein Kegel an Stelle der Pyramide träte. Faraday und Maxwell gebrauchen statt des Wortes Spannung die Bezeichnung Kraftflufs. Vergl. Nr. 53.

Bezeichnet man die auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte mit p_1 bezw. p_2, so hat man $p_1 F_1 = p_2 F_2$ oder $p_1 : p_2 = F_2 : F_1$. Die Anziehungskräfte sind also umgekehrt proportional den Grundflächen. Diese einfache Bemerkung giebt zu äufserst interessanten Schlüssen Veranlassung.

106) In sich geschlossene Fläche unter Einwirkung äufserer Massenpunkte. Der Punkt M von der Masse 1 wirke jetzt auf die homogene Massenbelegung einer beliebig gestalteten aber in sich geschlossenen Oberfläche ein. Unter welcher Spannung steht der Innenraum? (Der Raum wird als einfach zusammenhängend angenommen.)

Fig. 83.



Man denke sich von M aus einen Kegel MA_1B_1 von kleinem körperlichen Winkel gezeichnet, der die Fläche in A_1B_1 und A_2B_2 schneidet, was eine Zelle $A_1B_1B_2A_2$ mit den Grundflächen F_1 und F_2 geben möge. Macht man über die Belegungen der Grundflächen dieselben Annahmen, wie vorher, so sind die Anziehungsresultanten für die beiden Belegungen $p_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$, $p_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$. Jede zerlegt sich in eine Spannungskraft, die senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist und in eine in die Fläche (Tangentialebene) fallende Kraft, also in einen wirksamen und in einen in Bezug auf die Spannung des Innenraumes unwirksamen Teil. Sind α_1 und α_2 die entsprechenden Neigungswinkel, so handelt es sich um $s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1$ und $s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$. Man denke sich jetzt durch den Angriffspunkt jeder dieser Resultanten