



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

106) Einwirkung äusserer Punkte auf eine geschlossene Fläche (Satz von Laplace)

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

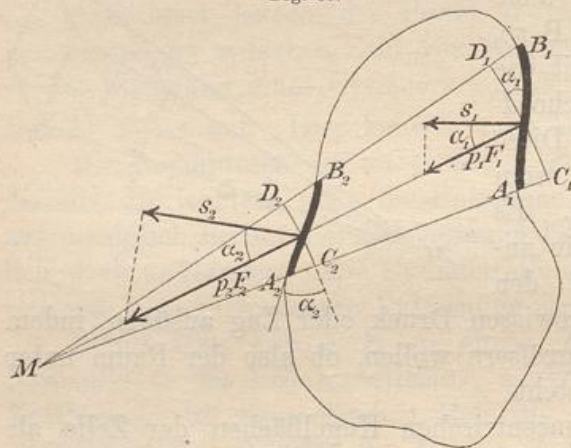
will den Zellenraum vergrößern, die andere ihn verkleinern. Da aber $F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2$ ist, so folgt $\frac{F_1}{r_1^2} - \frac{F_2}{r_2^2} = 0$. Druck und Zug

heben sich gegenseitig auf, so daß man sagen kann: Der Zellenraum steht unter der Spannung Null. Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn die ähnlichen Grundflächen irgend eine andere Gestalt hätten, wenn z. B. ein Kegel an Stelle der Pyramide träte. Faraday und Maxwell gebrauchen statt des Wortes Spannung die Bezeichnung Kraftfluß. Vergl. Nr. 53.

Bezeichnet man die auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte mit p_1 bzw. p_2 , so hat man $p_1 F_1 = p_2 F_2$ oder $p_1 : p_2 = F_2 : F_1$. Die Anziehungskräfte sind also umgekehrt proportional den Grundflächen. Diese einfache Bemerkung giebt zu äußerst interessanten Schlüssen Veranlassung.

— 106) In sich geschlossene Fläche unter Einwirkung äußerer Massenpunkte. Der Punkt M von der Masse 1 wirke jetzt auf die homogene Massenbelegung einer beliebig gestalteten

Fig. 83.



aber in sich geschlossenen Oberfläche ein. Unter welcher Spannung steht der Innenraum? (Der Raum wird als einfach zusammenhängend angenommen.)

Man denke sich von M aus einen Kegel MA_1B_1 von kleinem körperlichen Winkel gezeichnet, der die Fläche in A_1B_1 und A_2B_2 schneidet, was eine Zelle $A_1B_1B_2A_2$ mit den Grundflächen F_1 und F_2

geben möge. Macht man über die Belegungen der Grundflächen dieselben Annahmen, wie vorher, so sind die Anziehungsresultanten für die beiden Belegungen $p_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$, $p_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$. Jede zerlegt sich in

eine Spannungskraft, die senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist und in eine in die Fläche (Tangentialebene) fallende Kraft, also in einen wirksamen und in einen in Bezug auf die Spannung des Innenraumes unwirksamen Teil. Sind α_1 und α_2 die entsprechenden Neigungswinkel, so handelt es sich um $s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1$ und $s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$. Man denke sich jetzt durch den Angriffspunkt jeder dieser Resultanten

die zu M gehörige Niveaufläche gelegt, also z. B. C_1D_1 und C_2D_2 . Diese bilden mit den ursprünglichen Grundflächen (Tangentialebenen) ebenfalls die Winkel α_1 und α_2 , so daß die neuen Flächen von der Größe $F'_1 = F_1 \cos \alpha_1$ und $F'_2 = F_2 \cos \alpha_2$ sind. Daraus folgt

$$s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1 = \frac{F_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 = \frac{F'_1}{r_1^2}$$

und

$$s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2 = \frac{F_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \frac{F'_2}{r_2^2}.$$

Nun ist aber für die neuen Grundflächen, die einander ähnlich sind,

$$F'_1 : F'_2 = r_1^2 : r_2^2,$$

folglich ist, wenn man die entgegengesetzten Vorzeichen (Druck, Zug) berücksichtigt, die Summe der beiden Spannungen gleich Null. Also ist $p_1 F'_1 \cos \alpha_1 = p_2 F'_2 \cos \alpha_2$.

Wendet man das Verfahren auf sämtliche Teile der Oberfläche an, so findet dasselbe statt. Durch Summierung über die ganze Oberfläche folgt:

Befindet sich aufserhalb einer in sich geschlossenen Oberfläche, die homogen mit Masse belegt ist, ein anziehender Punkt, so ist die von ihm auf den Innenraum ausgeübte Gesamtspannung oder der Kraftfluß des Raumes gleich Null.

Dabei darf die Oberfläche auch so gestaltet sein, daß die von M aus gelegten Hilfskegel sie zum Teil mehrfach schneiden.

Liegen mehrere anziehende Massenpunkte aufserhalb der Fläche, so treten zu jeder Spannung s neue hinzu, die zu je zweien ebenfalls die Summe Null geben. Das Gesamtergebn wird also wiederum gleich Null. Die Massenpunkte dürfen auch eine kontinuierliche Linie, eine Fläche, einen Körper von beliebiger Gestalt bilden. Liegt das anziehende Gebilde aufserhalb der geschlossenen, homogen belegten Fläche, so ist die Gesamtspannung bzw. der Kraftfluß stets gleich Null.

107) Symmetrisches Zweipunktproblem. Am Beispiele des symmetrischen Zweipunktproblems soll die Bedeutung des Satzes auseinander gesetzt werden. In Fig. 84 sei $A_1B_1B_2A_2$ eine der kleinen Raumzellen mit den Grundflächen F_1 und F_2 und entsprechenden Seitenflächen. Man denke sich die Wände der Zelle in obiger Weise homogen mit Masse belegt, die von den Massenpunkten M_1 und M_2 , wo sich Masseneinheiten befinden, angezogen wird. Jedes Massenteilchen der Seitenwände wird so angezogen, daß die Resultante der Anziehungskräfte in die Wand selbst fällt, d. h. in die Richtung der