Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

107) Symmetrisches Zweipunktproblem

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

die zu M gehörige Niveaufläche gelegt, also z. B. $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$. Diese bilden mit den ursprünglichen Grundflächen (Tangentialebenen) ebenfalls die Winkel α_1 und α_2, so dafs die neuen Flächen von der Gröfse $F_1' = F_1 \cos \alpha_1$ und $F_2' = F_2 \cos \alpha_2$ sind. Daraus folgt

$$s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1 = \frac{F_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 = \frac{F_1'}{r_1^2}$$

und

$$s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2 = \frac{F_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \frac{F_2'}{r_2^2}.$$

Nun ist aber für die neuen Grundflächen, die einander ähnlich sind,

$$F_1' : F_2' = r_1^2 : r_2^2,$$

folglich ist, wenn man die entgegengesetzten Vorzeichen (Druck, Zug) berücksichtigt, die Summe der beiden Spannungen gleich Null. Also ist $p_1 F_1 \cos \alpha_1 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$.

Wendet man das Verfahren auf sämtliche Teile der Oberfläche an, so findet dasselbe statt. Durch Summierung über die ganze Oberfläche folgt:

Befindet sich aufserhalb einer in sich geschlossenen Oberfläche, die homogen mit Masse belegt ist, ein anziehender Punkt, so ist die von ihm auf den Innenraum ausgeübte Gesamtspannung oder der Kraftflufs des Raumes gleich Null.

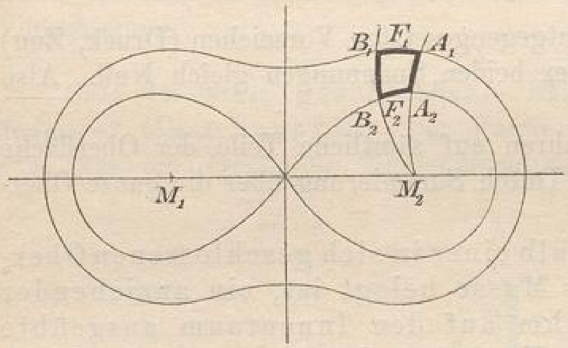
Dabei darf die Oberfläche auch so gestaltet sein, dafs die von M aus gelegten Hilfskegel sie zum Teil mehrfach schneiden.

Liegen mehrere anziehende Massenpunkte aufserhalb der Fläche, so treten zu jeder Spannung s neue hinzu, die zu je zweien ebenfalls die Summe Null geben. Das Gesamtresultat wird also wiederum gleich Null. Die Massenpunkte dürfen auch eine kontinuierliche Linie, eine Fläche, einen Körper von beliebiger Gestalt bilden. Liegt das anziehende Gebilde aufserhalb der geschlossenen, homogen belegten Fläche, so ist die Gesamtspannung bezw. der Kraftflufs stets gleich Null.

107) Symmetrisches Zweipunktproblem. Am Beispiele des symmetrischen Zweipunktproblems soll die Bedeutung des Satzes auseinander gesetzt werden. In Fig. 84 sei $A_1 B_1 B_2 A_2$ eine der kleinen Raumzellen mit den Grundflächen F_1 und F_2 und entsprechenden Seitenflächen. Man denke sich die Wände der Zelle in obiger Weise homogen mit Masse belegt, die von den Massenpunkten M_1 und M_2, wo sich Masseneinheiten befinden, angezogen wird. Jedes Massenteilchen der Seitenwände wird so angezogen, dafs die Resultante der Anziehungskräfte in die Wand selbst fällt, d. h. in die Richtung der

Tangente einer Kraftlinie. Die Wirkung auf die Spannung des Innenraums ist also gleich Null. In Frage kommen nur noch die auf F_1 und F_2 einwirkenden Anziehungen. Auf F_1 wirken zwei anziehende Kräfte $q_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$ und $q_1' F_1 = \frac{F_1}{\varrho_1^2}$, deren Resultante $p_1 F_1$ in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fällt. Auf F_2 wirken ebenso zwei Kräfte $q_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$ und $q_2' F_2 = \frac{F_2}{\varrho_2^2}$, deren Resultante $p_2 F_2$ in dieselbe Kraftlinie fällt. Sind nun die Niveauflächen F_1 und F_2 nur sehr wenig voneinander entfernt, so darf man die Kräfte als in denselben Geraden liegend betrachten, so daſs man sie durch Addition vereinigen kann. Dies giebt die Spannung $p_1 F_1 - p_2 F_2$. Weil aber die beiden anziehenden Massen M_1 und M_2 auſserhalb liegen, ist die Spannung des Zellenraums nach *Laplace* gleich Null, folglich ist $p_1 F = p_2 F_2$. Ebenso ist der Kraftfluſs der Zelle gleich Null.

Fig. 84.



Führt man demnach in der gezeichneten Kraftröhre an verschiedenen Stellen Normalschnitte $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$, so ist, wenn $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ die entsprechenden Einheitsresultanten sind, $p_1 F_1 = p_2 F_2 = p_3 F_3 = p_4 F_4, \ldots$, d. h. *das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt der Kraftröhre ist konstant.*

Die auf die Einheit wirkende Kraft nimmt also in demselben Maſse ab, wie der Normalschnitt zunimmt, d. h. *sämtliche Normalschnitte jeder Kraftröhre werden mit derselben Kraft angezogen.* Ebenso ist der Kraftfluſs für die ganze Röhre konstant.

108) *Allgemeinere Folgerungen.* Ganz dieselbe Betrachtung läſst sich aber für das unsymmetrische Zweipunktproblem anstellen, auch dann, wenn der eine Punkt anziehend, der andere abstoſsend wirkt, sie gilt auch für das Mehrpunktproblem und für die Anziehung kontinuierlicher Massen. Also:

Bei jedem Problem der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gilt für die Normalschnitte jeder Kraftlinie der Satz, daſs das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt eine konstante Gröſse ist.