Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

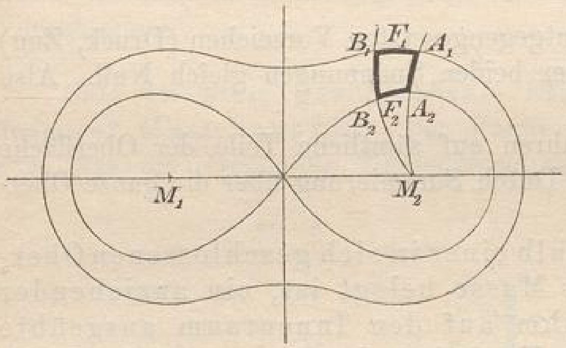
Leipzig, 1898

108) Allgemeine Folgerungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Tangente einer Kraftlinie. Die Wirkung auf die Spannung des Innenraums ist also gleich Null. In Frage kommen nur noch die auf F_1 und F_2 einwirkenden Anziehungen. Auf F_1 wirken zwei anziehende Kräfte $q_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$ und $q_1' F_1 = \frac{F_1}{\varrho_1^2}$, deren Resultante $p_1 F_1$ in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fällt. Auf F_2 wirken ebenso zwei Kräfte $q_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$ und $q_2' F_2 = \frac{F_2}{\varrho_2^2}$, deren Resultante $p_2 F_2$ in dieselbe Kraftlinie fällt. Sind nun die Niveauflächen F_1 und F_2 nur sehr wenig voneinander entfernt, so darf man die Kräfte als in denselben Geraden liegend betrachten, so dafs man sie durch Addition vereinigen kann. Dies giebt die Spannung $p_1 F_1 - p_2 F_2$. Weil aber die beiden anziehenden Massen M_1 und M_2 aufserhalb liegen, ist die Spannung des Zellenraums nach Laplace gleich Null, folglich ist $p_1 F = p_2 F_2$. Ebenso ist der Kraftflufs der Zelle gleich Null.

Fig. 84.



Führt man demnach in der gezeichneten Kraftröhre an verschiedenen Stellen Normalschnitte $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$, so ist, wenn $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ die entsprechenden Einheitsresultanten sind, $p_1 F_1 = p_2 F_2 = p_3 F_3 = p_4 F_4, \ldots$, d. h. das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt der Kraftröhre ist konstant.

Die auf die Einheit wirkende Kraft nimmt also in demselben Mafse ab, wie der Normalschnitt zunimmt, d. h. sämtliche Normalschnitte jeder Kraftröhre werden mit derselben Kraft angezogen. Ebenso ist der Kraftflufs für die ganze Röhre konstant.

108) Allgemeinere Folgerungen. Ganz dieselbe Betrachtung läfst sich aber für das unsymmetrische Zweipunktproblem anstellen, auch dann, wenn der eine Punkt anziehend, der andere abstofsend wirkt, sie gilt auch für das Mehrpunktproblem und für die Anziehung kontinuierlicher Massen. Also:

Bei jedem Problem der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gilt für die Normalschnitte jeder Kraftlinie der Satz, dafs das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt eine konstante Gröfse ist.

Um von der Tragweite dieses Satzes einen Begriff zu erhalten, kann man einige einfache Betrachtungen anstellen.

109) Unendliche Kugel als Niveaufläche. Für jeden endlichen anziehenden Massenkomplex nehmen die Niveauflächen nach aufsen hin mehr und mehr die Gestalt von Kugeln an, die ihren Mittelpunkt im Schwerpunkte der anziehenden Massen haben. Denkt man sich die unendlich grofse Kugel auf irgend welche Art, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise bei beliebig liegendem Pol, in gleiche Flächen eingeteilt und für jeden Eckpunkt ihres Netzes die Kraftlinie konstruiert, so ist für alle Stellen sämtlicher Kraftröhren pF dieselbe Gröfse, jede Niveaufläche wird also so zerlegt, dafs auf ihr pF konstant ist. (Man vergleiche dies mit den Betrachtungen über die Asymptoten im 5. Kapitel.) Dies erleichtert die Einteilung des Raumes in potentiell gleichwertige Zellen bei zahlreichen Problemen.

110) Das Gesetz der Zelleninhalte. Von Niveaufläche zu Niveaufläche möge die Einheit der Masse bewegt werden. Folgen die Potentialwerte der Niveauflächen einer arithmetischen Reihe, handelt es sich also um konstante Potentialdifferenzen, so ist zu jener Bewegung von Fläche zu Fläche überall dieselbe Arbeit pw nötig. Für irgend welche Raumstellen sei in diesem Sinne $pw = p_n w_n$. Nach Nr. 107 war zugleich $pF = p_n F_n$. Durch Division folgt

$$w : w_n = F : F_n .$$

Bezeichnet man also die Flächen F als die Grundflächen der Zellen, die w als ihre Höhen, so folgt:

Bei potentiell gleichwertiger Zelleneinteilung des Raumes verhalten sich die Grundflächen der Zellen wie ihre Höhen.

Ebenso, wie für das Zweipunktproblem gilt dies für das n-Punktproblem und für die allgemeinsten Probleme.

$$\text{Aus } \frac{w}{w_n} = \frac{F}{F_n} \text{ folgt } \frac{wF}{w_n F_n} = \frac{F}{F_n} \cdot \frac{F}{F_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2}.$$

Bezeichnet man also die Inhalte zweier Zellen mit J und J_n, so folgt:

$$\frac{J}{J_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2},$$

d. h. die Inhalte der Zellen eines Problems verhalten sich wie die Quadrate der Grundflächen, wie die Quadrate der