Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

110) Gesetz der Zelleninhalte

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Um von der Tragweite dieses Satzes einen Begriff zu erhalten, kann man einige einfache Betrachtungen anstellen.

109) Unendliche Kugel als Niveaufläche. Für jeden endlichen anziehenden Massenkomplex nehmen die Niveauflächen nach aufsen hin mehr und mehr die Gestalt von Kugeln an, die ihren Mittelpunkt im Schwerpunkte der anziehenden Massen haben. Denkt man sich die unendlich grofse Kugel auf irgend welche Art, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise bei beliebig liegendem Pol, in gleiche Flächen eingeteilt und für jeden Eckpunkt ihres Netzes die Kraftlinie konstruiert, so ist für alle Stellen sämtlicher Kraftröhren pF dieselbe Gröfse, jede Niveaufläche wird also so zerlegt, dafs auf ihr pF konstant ist. (Man vergleiche dies mit den Betrachtungen über die Asymptoten im 5. Kapitel.) Dies erleichtert die Einteilung des Raumes in potentiell gleichwertige Zellen bei zahlreichen Problemen.

110) Das Gesetz der Zelleninhalte. Von Niveaufläche zu Niveaufläche möge die Einheit der Masse bewegt werden. Folgen die Potentialwerte der Niveauflächen einer arithmetischen Reihe, handelt es sich also um konstante Potentialdifferenzen, so ist zu jener Bewegung von Fläche zu Fläche überall dieselbe Arbeit pw nötig. Für irgend welche Raumstellen sei in diesem Sinne $pw = p_n w_n$. Nach Nr. 107 war zugleich $pF = p_n F_n$. Durch Division folgt

$$w : w_n = F : F_n .$$

Bezeichnet man also die Flächen F als die Grundflächen der Zellen, die w als ihre Höhen, so folgt:

Bei potentiell gleichwertiger Zelleneinteilung des Raumes verhalten sich die Grundflächen der Zellen wie ihre Höhen.

Ebenso, wie für das Zweipunktproblem gilt dies für das n-Punktproblem und für die allgemeinsten Probleme.

$$\text{Aus } \frac{w}{w_n} = \frac{F}{F_n} \text{ folgt } \frac{wF}{w_n F_n} = \frac{F}{F_n} \cdot \frac{F}{F_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2}.$$

Bezeichnet man also die Inhalte zweier Zellen mit J und J_n, so folgt:

$$\frac{J}{J_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2},$$

d. h. die Inhalte der Zellen eines Problems verhalten sich wie die Quadrate der Grundflächen, wie die Quadrate der

Höhen und umgekehrt wie die Quadrate der Einheitsresultanten.

In Fig. 84 sind die Potentialflächen Drehungsflächen. Sind e und e_n die Abstände zweier Zellen von der Drehungsachse, α und α_n die am Einheitskreise gemessenen Bogen zwischen benachbarten Meridianschnitten, $s = AB$ und $s_n = A_n B_n$ die aus der Zeichnung zu entnehmenden Seitenlinien der Flächen F und F_n, so ist $F = s \cdot e\alpha$ und $F_n = s_n \cdot e_n \alpha$, also

$$\frac{F}{F_n} = \frac{se}{s_n e_n} = \frac{w}{w_n} = \frac{p_n}{p}.$$

Auch dieser besondere Satz ist leicht in Worte zu kleiden.

111) Cylindrische Probleme. Die wichtigste Folgerung ist die auf die zweidimensionalen Probleme führende.

M_1 und M_2 in Fig. 84 seien die Darstellungen zweier unbegrenzten Geraden, die in derselben Dichte homogen mit Masse belegt sind. In allen Normalschnitten der beiden Geraden findet dann dasselbe statt, man braucht also nur einen einzigen Normalschnitt auf die Niveau- und Kraftlinien zu untersuchen, d. h. das Problem ist ein zweidimensionales.

Die Normalschnitte folgen bei gleichwertiger Zellenteilung längs der Richtung der parallelen Geraden in demselben Abstande aufeinander. An Stelle von $e\alpha$ für den Fall von Drehungsflächen tritt also einfach $e = e_n$. (Legt man die Drehungsachse ins Unendliche, so kann man ebenfalls $e = e_n$ setzen.) Jetzt also wird $F : F_n = es : es_n$, oder $F : F_n = s : s_n$. Es war aber

$$F : F_n = w : w_n,$$

demnach folgt

$$s : s_n = w : w_n = p_n : p.$$

Folglich:

Bei allen Zellen eines zweidimensionalen Problems verhalten sich die Grundlinien der Zellen wie ihre Höhen, die sämtlichen Zellen sind also kleine ähnliche Rechtecke, z. B. kleine „Quadrate". Die Kräfte sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Zellen.

In der Anziehungslehre handelt es sich um unbegrenzte Cylinder als Niveauflächen. Der Satz gilt allgemein von jeder Art von Cylinderproblemen. Die Helmholtzschen Flüssigkeitsströmungen führen jetzt auf stationäre Strömungen in der Ebene, mögen diese nun hydrodynamischer Art oder Wärme- oder Elektrizitätsströmungen sein. Von hier aus lassen sich die Helmholtz-Kirchhoffschen Probleme der freien Ausflufsstrahlen, gewisse elektromagnetische Probleme und die