Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

111) Cylindrische Probleme

Höhen und umgekehrt wie die Quadrate der Einheitsresultanten.

In Fig. 84 sind die Potentialflächen Drehungsflächen. Sind e und e_n die Abstände zweier Zellen von der Drehungsachse, α und α_n die am Einheitskreise gemessenen Bogen zwischen benachbarten Meridianschnitten, $s = AB$ und $s_n = A_n B_n$ die aus der Zeichnung zu entnehmenden Seitenlinien der Flächen F und F_n, so ist $F = s \cdot e\alpha$ und $F_n = s_n \cdot e_n \alpha$, also

$$\frac{F}{F_n} = \frac{se}{s_n e_n} = \frac{w}{w_n} = \frac{p_n}{p}.$$

Auch dieser besondere Satz ist leicht in Worte zu kleiden.

111) Cylindrische Probleme. Die wichtigste Folgerung ist die auf die zweidimensionalen Probleme führende.

M_1 und M_2 in Fig. 84 seien die Darstellungen zweier unbegrenzten Geraden, die in derselben Dichte homogen mit Masse belegt sind. In allen Normalschnitten der beiden Geraden findet dann dasselbe statt, man braucht also nur einen einzigen Normalschnitt auf die Niveau- und Kraftlinien zu untersuchen, d. h. das Problem ist ein zweidimensionales.

Die Normalschnitte folgen bei gleichwertiger Zellenteilung längs der Richtung der parallelen Geraden in demselben Abstande aufeinander. An Stelle von $e\alpha$ für den Fall von Drehungsflächen tritt also einfach $e = e_n$. (Legt man die Drehungsachse ins Unendliche, so kann man ebenfalls $e = e_n$ setzen.) Jetzt also wird $F : F_n = es : es_n$, oder $F : F_n = s : s_n$. Es war aber

$$F : F_n = w : w_n,$$

demnach folgt

$$s : s_n = w : w_n = p_n : p.$$

Folglich:

Bei allen Zellen eines zweidimensionalen Problems verhalten sich die Grundlinien der Zellen wie ihre Höhen, die sämtlichen Zellen sind also kleine ähnliche Rechtecke, z. B. kleine „Quadrate". Die Kräfte sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Zellen.

In der Anziehungslehre handelt es sich um unbegrenzte Cylinder als Niveauflächen. Der Satz gilt allgemein von jeder Art von Cylinderproblemen. Die Helmholtzschen Flüssigkeitsströmungen führen jetzt auf stationäre Strömungen in der Ebene, mögen diese nun hydrodynamischer Art oder Wärme- oder Elektrizitätsströmungen sein. Von hier aus lassen sich die Helmholtz-Kirchhoffschen Probleme der freien Ausflufsstrahlen, gewisse elektromagnetische Probleme und die dazu gehörigen Helmholtzschen Wirbelbewegungen behandeln, aufserdem Probleme der Biegungs- und Torsionsfestigkeit, der Kapillarität, der Kartographie u. s. w. So führt der unscheinbare Laplacesche Satz in die wichtigsten Gebiete der neueren Physik, in die Probleme des sogenannten logarithmischen Potentials, dessen Begriff sich aus dem Folgenden ergeben wird.

112) Das zweidimensionale Einpunktproblem und das logarithmische Potential. Es handelt sich um die quadratische Einteilung der Ebene durch das Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar. Dabei wird

$$s : s_n = w : w_n = r : r_n = F : F_n,$$

wo die F die Zellenflächen des zugehörigen Cylinderproblems sind. Aus

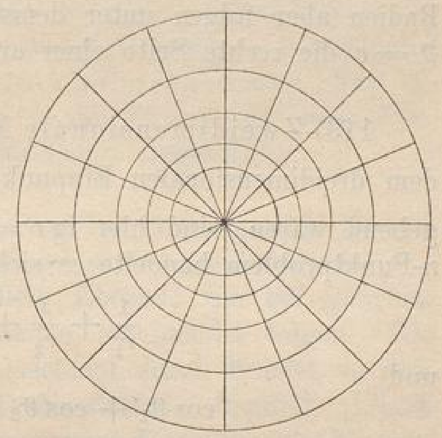
$$F : F_n = p_n : p$$

folgt für die anziehende Kraft, mit der der homogene Cylinder die freie Masseneinheit anzieht,

$$p : p_n = r_n : r,$$

d. h.

Fig. 85.



Die Anziehungskraft der unbegrenzten homogenen Geraden ist umgekehrt proportional der Entfernung.

Wird die Masseneinheit auf dem Radius ins Unendliche gbracht, so ist also das Arbeitsdiagramm eine gleichseitige Hyperbel von der Form

$$y = k \cdot \frac{1}{r} \cdot$$

Die Entfernung bis ins Unendliche erfordert, wie das Diagramm zeigt, unendlich grofse Arbeit, was nicht wunder nimmt, da die auf der unbegrenzten Geraden homogen verteilte anziehende Masse bei endlicher Dichte selbst unendlich grofs ist. Das Potential ist also an jeder Stelle unendlich grofs, d. h. der Newtonsche Potentialbegriff wird unbrauchbar.

Nun läfst sich aber elementar zeigen, dafs die Fläche der gleichseitigen Hyperbel von 1 bis r

$$\overset{r}{\underset{1}{F}} = k \lg r$$

ist (vgl. Meth. Lehrbuch III, Seite 136). Es ist zweckmäfsig, jetzt