Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

112) Das zweidimensionale Einpunktproblem

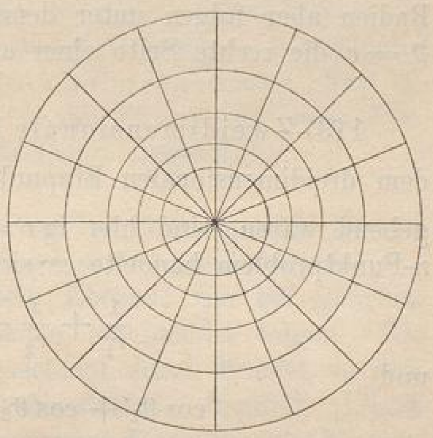
urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

dazu gehörigen Helmholtzschen Wirbelbewegungen behandeln, aufserdem Probleme der Biegungs- und Torsionsfestigkeit, der Kapillarität, der Kartographie u. s. w. So führt der unscheinbare Laplacesche Satz in die wichtigsten Gebiete der neueren Physik, in die Probleme des sogenannten logarithmischen Potentials, dessen Begriff sich aus dem Folgenden ergeben wird.

112) Das zweidimensionale Einpunktproblem und das logarithmische Potential. Es handelt sich um die quadratische Einteilung der Ebene durch das Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar. Dabei wird

$$s : s_n = w : w_n = r : r_n = F : F_n,$$

Fig. 85.



wo die F die Zellenflächen des zugehörigen Cylinderproblems sind. Aus

$$F : F_n = p_n : p$$

folgt für die anziehende Kraft, mit der der homogene Cylinder die freie Masseneinheit anzieht,

$$p : p_n = r_n : r,$$

d. h.

Die Anziehungskraft der unbegrenzten homogenen Geraden ist umgekehrt proportional der Entfernung.

Wird die Masseneinheit auf dem Radius ins Unendliche gbracht, so ist also das Arbeitsdiagramm eine gleichseitige Hyperbel von der Form

$$y = k \cdot \frac{1}{r}.$$

Die Entfernung bis ins Unendliche erfordert, wie das Diagramm zeigt, unendlich grofse Arbeit, was nicht wunder nimmt, da die auf der unbegrenzten Geraden homogen verteilte anziehende Masse bei endlicher Dichte selbst unendlich grofs ist. Das Potential ist also an jeder Stelle unendlich grofs, d. h. der Newtonsche Potentialbegriff wird unbrauchbar.

Nun läfst sich aber elementar zeigen, dafs die Fläche der gleichseitigen Hyperbel von 1 bis r

$$\overset{r}{\underset{1}{F}} = k \lg r$$

ist (vgl. Meth. Lehrbuch III, Seite 136). Es ist zweckmäfsig, jetzt diesen Ausdruck als das Potential zu betrachten. Der Name logarithmisches Potential erklärt sich von selbst.

Unter Potential in einem Punkte versteht man also jetzt die Arbeit, die nötig ist, die Masseneinheit aus dem Abstande 1 von der Geraden in den Abstand r jenes Punktes von der Geraden zu versetzen.

Die potentielle Gleichwertigkeit der Zelleneinteilung erhält man dadurch, daſs man den Wert c von $\lg r$ einer arithmetischen Reihe folgen läſst. Da aus $c = \lg r$ folgt $r = e^c$, was einer geometrischen Reihe folgt, wenn c einer arithmetischen folgt, so ergiebt sich, wie selbstverständlich, daſs man lauter ähnliche Kreisringe erhält. Die Radien aber folgen unter demselben Winkel aufeinander, so daſs in $\vartheta = c$ die rechte Seite einer arithmetischen Reihe zu folgen hat.

113) Zweidimensionale Mehrpunktprobleme. Während bei dem dreidimensionalen Einpunktproblem $\frac{1}{r} = c$ und $\cos\vartheta = c$ maſsgebend waren, sind hier $\lg r = c$ und $\vartheta = c$ maſsgebend. Für das n-Punktproblem handelte es sich früher bei gleichen Massen um

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = c$$

und

$$\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 + \cdots + \cos\vartheta_n = c.$$

An Stelle dieser Gleichungen treten jetzt die folgenden:

1) $$\lg r_1 + \lg r_2 + \cdots + \lg r_n = c$$

2) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = c$$

Statt der ersteren läſst sich auch schreiben

$$\lg(r_1 r_2 \cdots r_n) = c$$

oder

1)* $$r_1 r_2 \ldots r_n = e^c.$$

Bei ungleichen „Massen“ erhält man

3) $$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_2 + \cdots + m_n \lg r_n = c,$$

4) $$m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 + \cdots + m_n\vartheta_n = c.$$

Für 3) läſst sich auch schreiben

$$\lg\left(r_1^{m_1} r_2^{m_2} \ldots r_n^{m_n}\right) = c$$

oder

$$r_1^{m_1} r_1^{m_2} \ldots r_n^{m_n} = e^c.$$

Die m können sämtlich positiv oder teilweise negativ sein.