Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

114) Problem der unbegrenzten homogenen Ebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Für die Kurvenscharen 1 und 3 hat Verfasser vor längeren Jahren (Bd. 83 des Crelleschen Journals) für den Fall der regelmäſsigen Anordnung der Punkte auf einem Kreise den Namen „reguläre Lemniskaten n^{ter} Ordnung“, für die Kurven 2 und 4 die Namen „reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ vorgeschlagen. Für beliebige Anordnungen nannte er sie „irreguläre Lemniskaten bezw. Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ (Progr. 1880 der Hagener Gewerbeschule). Diese Namen sind in zahlreichen Abhandlungen (z. B. von Biermann, Laurin, Forchheimer, Guébhard, Hildebrand) beibehalten worden. Für den Fall $n = 1$ handelt es sich um koncentrische Kreisschar und Strahlenbüschel, für $n = 2$ unter Voraussetzung positiver gleicher m um konfokale Lemniskaten (Cassinische Kurven) und ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, bei entgegengesetzten m um Kreisschar und Kreisbüschel. Sämtliche gestatten Einteilung der Ebenen in kleine Quadrate. Kap. X, XI, XII in des Verfassers Einführung in die Theorie der isog. Verwandtschaften besprechen diese Kurvenscharen eingehender.

114) Das Problem der unbegrenzten homogenen Ebene und das Planpotential. Die Kraftlinien stehen senkrecht auf der Ebene, die Niveauflächen sind parallele Ebenen, die bei gleichen Potentialdifferenzen in gleichen Abständen aufeinander folgen. Die naturgemäſse Einteilung des Raumes geschieht durch Würfel, so daſs es sich um quadratische Prismen als Kraftröhren handelt. [Nach Nr. 104 könnte man allerdings auch ringförmige Einteilung der Niveauflächen wählen, wie Maxwell sie bisweilen anwendet (vgl. Fig. 81). Daſs auch die Einteilung in gleichseitige Dreiecke, regelmäſsige Sechsecke, in Ringe ähnlicher Polygone erfolgen darf, darauf sei gleichfalls hingewiesen.] Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit erfolgt in den Röhren mit konstanter Geschwindigkeit. Aus $v = v_1$ folgt nach Nr. 53 $p = p_1$, so daſs die Anziehung der Ebene in allen Entfernungen dieselbe ist. Das Arbeitsdiagramm, ein Rechteck, ändert seinen Inhalt in gleichen Abständen stets um dieselbe Gröſse. Bei Bewegung der angezogenen Masseneinheit auf einer der Kraftlinien wird also das Diagramm der Potentialwerte wie bei dem Ohmschen Gesetze durch eine schräge Gerade begrenzt. Das Newtonsche Potential würde für die Bewegung bis ins Unendliche überall einen unendlich groſsen Wert geben. Es ist also vorzuziehen, den von der Ebene aus gemessenen Rechtecksinhalt als das Potential zu betrachten, und für dieses neue Potential den Namen Planpotential einzuführen. Da nach Nr. 27 bezw. 74 die Anziehung der Ebene bei einer homogenen Belegung von Dichte $\delta = 1$ überall gleich 2π ist, so ist in der Entfernung x das Planpotential gleich $2\pi x$. Selbstverständlich kann dazu noch eine Gravitationskonstante k als Faktor treten. In

jedem System von Kraftlinien und Niveaulinien bezw. Niveauflächen läfst sich — von gewissen singulären Punkten abgesehen — jeder unendlich kleine Raum zwischen zwei benachbarten Niveauflächen als homogenes Feld betrachten, sobald er durch Kraftlinien begrenzt ist.

115) Die logarithmische Abbildung. Der direkte Übergang von der quadratischen Einteilung durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar zur quadratischen Einteilung durch Parallelenscharen kann mit Hilfe der logarithmischen Abbildung $Z = \lg z$ oder

$$X + Yi = \lg(x + yi),$$

wo i gleich $\sqrt{-1}$ ist und die bekannte geometrische Darstellung der komplexen Gröfsen nach Argand-Gaufs benutzt wird, geschehen. Es ist nämlich für die letzte Gleichung zu schreiben

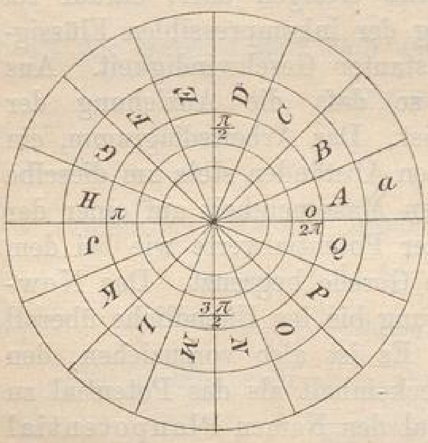
$$X + Yi = R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \lg[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \lg r + \lg e^{\varphi i}$$
$$= \lg r + \varphi i,$$

so dafs

$$X = \lg r = \lg\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$Y = \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

ist. Dem Kreise $\lg r = c$ in Fig. 86a oder $r = e^c$ entspricht also die vertikale Gerade $X = c$ in Fig. 86b, dem Strahle durch den Nullpunkt von Neigung $\vartheta = c$ entspricht die horizontale Gerade $Y = c$. Da statt $\vartheta = c$ auch geschrieben werden kann $\vartheta \pm 2n\pi = c$ erkennt man, dafs der Geraden $\vartheta = c$ unendlich viele horizontale Gerade $Y = c \pm 2n\pi$ entsprechen können. Die Abbildung der z-Ebene geschieht also auf unendlich viele horizontale Parallelstreifen von der Breite 2π, die sich von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ erstrecken. (Vieldeutigkeit des Logarithmus, Periodizität der Exponentialfunktion.)

Fig. 86a.



Die Gerade $X = o$ entspricht dem Einheitskreise, die Geraden $Y = o$ und $Y = \pm 2n\pi$ entsprechen der X-Achse von o bis $+\infty$. Die Diagonalkurven in der Z-Ebene sind Gerade von 45^0 Neigung, in der z-Ebene logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel 45^0. Man hat zugleich den Zusammenhang zwischen der Polarkarte von Hipparch-Ptolemaeus