Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

115) Die logarithmische Abbildung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

jedem System von Kraftlinien und Niveaulinien bezw. Niveauflächen läfst sich — von gewissen singulären Punkten abgesehen — jeder unendlich kleine Raum zwischen zwei benachbarten Niveauflächen als homogenes Feld betrachten, sobald er durch Kraftlinien begrenzt ist.

115) Die logarithmische Abbildung. Der direkte Übergang von der quadratischen Einteilung durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar zur quadratischen Einteilung durch Parallelenscharen kann mit Hilfe der logarithmischen Abbildung $Z = \lg z$ oder

$$X + Yi = \lg(x + yi),$$

wo i gleich $\sqrt{-1}$ ist und die bekannte geometrische Darstellung der komplexen Gröfsen nach Argand-Gaufs benutzt wird, geschehen. Es ist nämlich für die letzte Gleichung zu schreiben

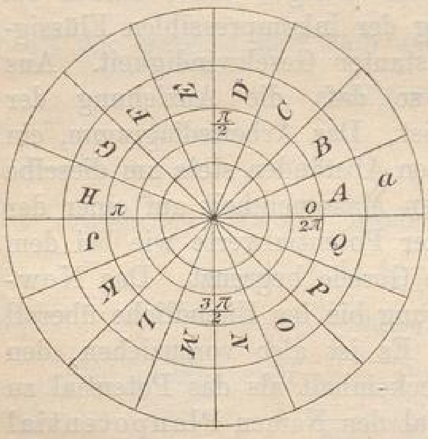
$$X + Yi = R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \lg[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \lg r + \lg e^{\varphi i}$$
$$= \lg r + \varphi i,$$

so dafs

$$X = \lg r = \lg\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$Y = \varphi = \operatorname{arctan}\frac{y}{x}$$

ist. Dem Kreise $\lg r = c$ in Fig. 86a oder $r = e^c$ entspricht also die vertikale Gerade $X = c$ in Fig. 86b, dem Strahle durch den Nullpunkt von Neigung $\vartheta = c$ entspricht die horizontale Gerade $Y = c$. Da statt $\vartheta = c$ auch geschrieben werden kann $\vartheta \pm 2n\pi = c$ erkennt man, dafs der Geraden $\vartheta = c$ unendlich viele horizontale Gerade $Y = c \pm 2n\pi$ entsprechen können. Die Abbildung der z-Ebene geschieht also auf unendlich viele horizontale Parallelstreifen von der Breite 2π, die sich von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ erstrecken. (Vieldeutigkeit des Logarithmus, Periodizität der Exponentialfunktion.)

Fig. 86a.



Die Gerade $X = o$ entspricht dem Einheitskreise, die Geraden $Y = o$ und $Y = \pm 2n\pi$ entsprechen der X-Achse von o bis $+\infty$. Die Diagonalkurven in der Z-Ebene sind Gerade von 45^0 Neigung, in der z-Ebene logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel 45^0. Man hat zugleich den Zusammenhang zwischen der Polarkarte von Hipparch-Ptolemaeus und der Schiffahrtskarte von Mercator. Beliebigen Geraden von der Neigung γ auf dieser Karte entsprechen logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel γ mit den Radien in der andern. Diese sind die Darstellungen der loxodromischen Schiffahrtslinien, die sich ergeben, wenn ein Schiff stets denselben Kurs beibehält. Zieht man also z. B. von einem Küstenpunkte Englands nach einem solchen Brasiliens auf der Mercatorkarte eine gerade Linie, so erhält man den zu wählenden Kurs als Neigung der Geraden. Von Tag zu Tag wird auf der Fahrt durch Chronometer und durch Beobachtung der Mittagshöhe (oder auf der Nordhalbkugel durch Beobachtung der Höhe des Polarsterns) Länge und Breite für das Schiff bestimmt und in die Mercatorkarte eingetragen. Der Meeresströmungen wegen und wegen der seitlichen Abweichungen durch Winddruck wird der gefundene Ort nicht genau in die gezeichnete Linie fallen, so daſs man erkennt, in welcher Weise durch geänderten Kurs der Fehler korrigiert werden kann. Darin beruht die Wichtigkeit der Mercatorkarte und der logarithmischen Abbildung für die Nautik. (Vergl. Kapitel XIII der „Isogonalen Verwandtschaften“, wo im Anschluſs an eine Abhandlung des Verfassers in Bd. 16 der Schlömilchschen Zeitschrift die Eigenschaften der Spiralen und Loxodromen in leichter Weise abgeleitet werden. Burmester hat in seiner Kinematik und in Bd. 20 derselben Zeitschrift diese Betrachtungen für kinematische Zwecke verwendet.)

Fig. 86b.

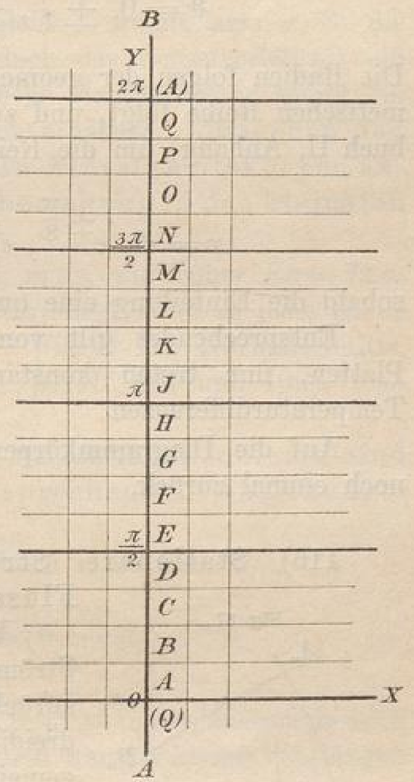


Fig. 86a und b giebt gewissermaſsen den Zusammenhang des logarithmischen Potentials und des Planpotentials, sowohl im Newtonschen Sinne als auch im Helmholtzschen Sinne des Geschwindigkeitspotentials.

Strömt z. B. von der unbegrenzten Geraden AB (Fig. 86b) aus Wärme in der Richtung nach $x = +\infty$ ab und wird dabei die Gerade auf konstanter Temperatur gehalten, so sind die senkrechten Parallelen Isothermen, die horizontalen sind Stromlinien. Strömt dagegen in Fig. 86a vom Einheitskreise aus Wärme nach dem unendlichen Bereiche ab, so sind die koncentrischen Kreise Isothermen, die Strahlen sind Stromlinien. In beiden Fällen entsprechen die benachbarten Niveaukurven konstanten Temperaturunterschieden.

In Fig. 86a folgen die Strahlen unter dem Winkel $\frac{\pi}{8}$ oder $\frac{2\pi}{16}$ aufeinander, die Neigungen bilden also die arithmetische Reihe

$$\vartheta = 0,\ \pm\frac{\pi}{8},\ \pm\frac{2\pi}{8},\ \pm\frac{3\pi}{8},\ \pm\frac{4\pi}{8},\ \ldots$$

Die Radien folgen der geometrischen Reihe für e^c, wo c einer arithmetischen Reihe folgt, und zwar handelt es sich (vgl. Method. Lehrbuch II, Anhang) um die Reihe

$$r = e^0,\ e^{\pm\frac{\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{2\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{3\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{4\pi}{8}},\ \ldots,$$

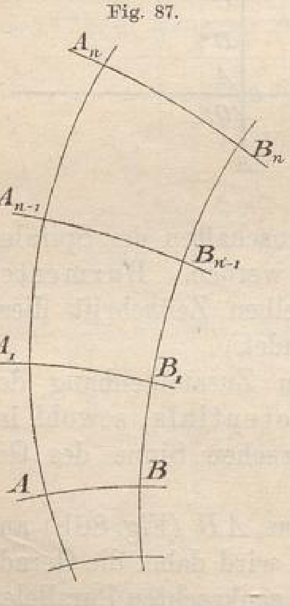
sobald die Einteilung eine quadratische ist.

Entsprechendes gilt von der elektrischen Strömung in ebenen Platten, nur treten konstante Potentialdifferenzen an Stelle der Temperaturdifferenzen.

Auf die Diagrammkörper dieser Potentiale kommen wir später noch einmal zurück.

116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Fig. 87.



Wir kehren zu den in Nr. 53 besprochenen Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten zurück, und zwar soll es sich wieder um den dreidimensionalen Raum, jedoch um ganz allgemein gestaltete Kraftlinien handeln.

Fig. 87 stellt einen von Kraftlinien gebildeten sehr eng zu denkenden Kanal dar. Damit die früher besprochene Bewegung überhaupt möglich sei, sind gewisse Annahmen zu machen. Abzusehen ist von der inneren und äufseren Reibung der Flüssigkeit und den daraus erfolgenden Drehungen der Moleküle. Auch vom Einflusse der Beharrung ist abzusehen. Oben war dies alles nicht nötig, da die Flüssigkeit geradlinig strömte. Jetzt ist die Strömung eine krummlinige, also würde die Flüssigkeit infolge der Beharrung sich tangential von der Stromlinie entfernen. Dies ist wegzudenken oder durch Annahme wirklicher Kanalwände unmöglich zu machen.