# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

ab, so sind die koncentrischen Kreise Isothermen, die Strahlen sind Stromlinien. In beiden Fällen entsprechen die benachbarten Niveaukurven konstanten Temperaturunterschieden.

In Fig. 86a folgen die Strahlen unter dem Winkel $\frac{\pi}{8}$ oder $\frac{2\pi}{16}$ aufeinander, die Neigungen bilden also die arithmetische Reihe

$$\vartheta = 0,\ \pm\frac{\pi}{8},\ \pm\frac{2\pi}{8},\ \pm\frac{3\pi}{8},\ \pm\frac{4\pi}{8},\ \ldots$$

Die Radien folgen der geometrischen Reihe für $e^c$, wo $c$ einer arithmetischen Reihe folgt, und zwar handelt es sich (vgl. Method. Lehrbuch II, Anhang) um die Reihe

$$r = e^0,\ e^{\pm\frac{\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{2\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{3\pi}{8}},\ e^{\pm\frac{4\pi}{8}},\ \ldots,$$

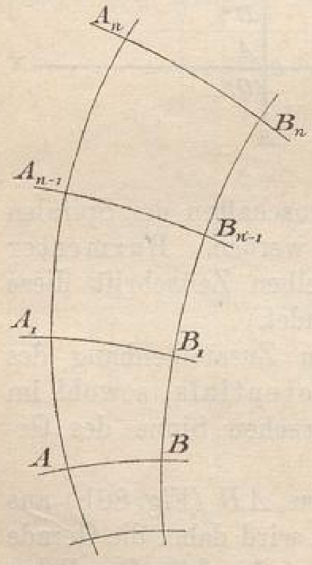
sobald die Einteilung eine quadratische ist.

Entsprechendes gilt von der elektrischen Strömung in ebenen Platten, nur treten konstante Potentialdifferenzen an Stelle der Temperaturdifferenzen.

Auf die Diagrammkörper dieser Potentiale kommen wir später noch einmal zurück.

## 116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Fig. 87.




Wir kehren zu den in Nr. 53 besprochenen Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten zurück, und zwar soll es sich wieder um den dreidimensionalen Raum, jedoch um ganz allgemein gestaltete Kraftlinien handeln.

Fig. 87 stellt einen von Kraftlinien gebildeten sehr eng zu denkenden Kanal dar. Damit die früher besprochene Bewegung überhaupt möglich sei, sind gewisse Annahmen zu machen. Abzusehen ist von der inneren und äufseren Reibung der Flüssigkeit und den daraus erfolgenden Drehungen der Moleküle. Auch vom Einflusse der Beharrung ist abzusehen. Oben war dies alles nicht nötig, da die Flüssigkeit geradlinig strömte. Jetzt ist die Strömung eine krummlinige, also würde die Flüssigkeit infolge der Beharrung sich tangential von der Stromlinie entfernen. Dies ist wegzudenken oder durch Annahme wirklicher Kanalwände unmöglich zu machen.

Aufserdem ist $AA_1$ verschieden von $BB_1$, was zugleich einen Geschwindigkeitsunterschied bedeutet. Die Reibung zwischen benachbarten Stromlinien ist also gleichfalls wegzudenken, in jeder Stromlinie also vollziehen sich die Bewegungen unbeeinflufst durch die Vorgänge in den benachbarten.

Jeder kleine Rechteckskörper der Flüssigkeit, der wie $AB\,B_1A_1$ von Niveauflächen und Stromflächen (Stromlinien) begrenzt ist, bleibt während der ganzen Bewegung ein solcher, nimmt also z. B. die Gestalt $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$ an, wobei jedoch das Seitenverhältnis ein anderes geworden ist. Das einbeschriebene Hauptellipsoid bleibt ein solches, erhält jedoch ein anderes Achsenverhältnis. Zwischen den verschiedenen Gestaltungen, die ein Flüssigkeitskörper annimmt, besteht also eine Affinitätsbeziehung in den kleinsten Teilen.

Da die Strömung stationär sein soll, mufs, wie früher $Fv = F_nv_n$ oder $F : F_n = v_n : v$ sein, d. h. die Geschwindigkeit ist an jeder Stelle des Kanals umgekehrt proportional der Fläche des Normalschnitts. Oben war ganz allgemein $F : F_n = p_n : p$ (Nr. 107 und 108), also ist $v : v_n = p : p_n$, d. h.

Die Geschwindigkeiten jedes Strömungsproblems sind proportional den Kräften des entsprechenden Anziehungsproblems.

Beim symmetrischen Zweipunktproblem z. B. war

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Abgesehen von einem konstanten Faktor folgt $v^2$ in den entsprechenden Kraftröhren demselben Ausdrucke. Zugleich war für kleine Weglängen

$$p = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w},$$

also mufs auch hier

$$v = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w} = kG$$

sein. Demnach ist $v : v_n = G : G_n$, d. h. die Geschwindigkeit proportional dem Potentialgefälle. Der Ausdruck $vF = kF\frac{V_2 - V_1}{w}$ bedeutet die konstante Stromstärke innerhalb des Kanals.

Die Darlegungen der Abschnitte 53 bis 55 über elektrische und Wärmeströmungen könnten also an dieser Stelle wörtlich wiederholt und auf die allgemeinen Formen der Kraftröhren übertragen werden.

Die Punkte, aus denen die Wärme oder Elektrizität ausströmt, sollen als Quellpunkte bezeichnet werden. Diese Punkte können von verschiedener Ergiebigkeit sein, auch von negativer. Dies entspricht der Koncentration verschiedener Mengen von Elektrizität oder ponderabler Masse, von denen die ersteren entgegengesetzte Vorzeichen haben können. Strömen z. B. aus $M_1$ und $M_2$ verschiedene Wärmemengen $\mu_1$ und $\mu_2$ in den Raum, was dadurch erreicht werden kann, daſs sie auf entsprechend verschiedenen Temperaturen gehalten werden, so sind die Stromlinien von der Form $\mu_1 \cos \vartheta_1 + \mu_2 \cos \vartheta_2 = c$, die Isothermen von der Form

$$T = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = c.$$

Ist $k$ die Leitungskonstante, so ist $kF\frac{T_2 - T_1}{w} = kFG$ die sekundlich passierende Wärmemenge. Der Ausdruck Wärmemenge ist nur als Veranschaulichung zu betrachten. Sollen sämtliche Kraftröhren potentiell gleichwertig sein, so muſs durch sämtliche Querschnitte aller Röhren dieselbe Menge flieſsen. Sind Asymptoten vorhanden, so gehört eine unendliche, um den Schwerpunkt $S$ gelegte Kugel zum Problem. Auf dieser müssen dann sämtliche Kraftröhren gleiche Flächen ausschneiden. Dies entspricht dem gleichen körperlichen Winkel bei dem Einpunktproblem.

So entspricht jedem Anziehungsproblem ein Problem, bei dem es sich um stationäre Strömung einer Flüssigkeit, oder der Elektrizität oder der Wärme handelt.

Ist die Strömung zweidimensional, so bleiben nach Nr. 111 kleine quadratische Felder stets quadratische Felder, ein einbeschriebener Kreis also bleibt ein einbeschriebener Kreis, d. h. es findet nicht nur Affinität, sondern Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen statt. Hierbei handelt es sich z. B. um Elektrizitäts- oder Wärmeströmungen in dünnen Platten, auf die wir noch näher eingehen werden.

Selbstverständlich kann man von dem Laplaceschen Satze folgende Umkehrung aussprechen: Steht eine in sich geschlossene, homogen mit Masse belegte Fläche unter einer Spannung, die von Null verschieden ist, so können nicht sämtliche anziehende Massenpunkte auſserhalb der Fläche liegen.

## 117) Der Kugelsatz von Gauſs.

Wiederum diene das symmetrische Zweipunktsystem mit positiven Massen $M_1$ und $M_2$ von der Gröſse 1 als einleitendes Beispiel. Um irgend einen Punkt $C$ sei eine Kugel gelegt, die $M_1$ und $M_2$ ausschlieſst. Jede Einheit ihrer Oberfläche sei mit der Masse 1 belegt.