Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

117) Der Kugelsatz von Gauss

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Die Punkte, aus denen die Wärme oder Elektrizität ausströmt, sollen als Quellpunkte bezeichnet werden. Diese Punkte können von verschiedener Ergiebigkeit sein, auch von negativer. Dies entspricht der Koncentration verschiedener Mengen von Elektrizität oder ponderabler Masse, von denen die ersteren entgegengesetzte Vorzeichen haben können. Strömen z. B. aus M_1 und M_2 verschiedene Wärmemengen μ_1 und μ_2 in den Raum, was dadurch erreicht werden kann, dafs sie auf entsprechend verschiedenen Temperaturen gehalten werden, so sind die Stromlinien von der Form $\mu_1 \cos \vartheta_1 + \mu_2 \cos \vartheta_2 = c$, die Isothermen von der Form

$$T = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = c.$$

Ist k die Leitungskonstante, so ist $kF\frac{T_2 - T_1}{w} = kFG$ die sekundlich passierende Wärmemenge. Der Ausdruck Wärmemenge ist nur als Veranschaulichung zu betrachten. Sollen sämtliche Kraftröhren potentiell gleichwertig sein, so mufs durch sämtliche Querschnitte aller Röhren dieselbe Menge fliefsen. Sind Asymptoten vorhanden, so gehört eine unendliche, um den Schwerpunkt S gelegte Kugel zum Problem. Auf dieser müssen dann sämtliche Kraftröhren gleiche Flächen ausschneiden. Dies entspricht dem gleichen körperlichen Winkel bei dem Einpunktproblem.

So entspricht jedem Anziehungsproblem ein Problem, bei dem es sich um stationäre Strömung einer Flüssigkeit, oder der Elektrizität oder der Wärme handelt.

Ist die Strömung zweidimensional, so bleiben nach Nr. 111 kleine quadratische Felder stets quadratische Felder, ein einbeschriebener Kreis also bleibt ein einbeschriebener Kreis, d. h. es findet nicht nur Affinität, sondern Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen statt. Hierbei handelt es sich z. B. um Elektrizitäts- oder Wärmeströmungen in dünnen Platten, auf die wir noch näher eingehen werden.

Selbstverständlich kann man von dem Laplaceschen Satze folgende Umkehrung aussprechen: Steht eine in sich geschlossene, homogen mit Masse belegte Fläche unter einer Spannung, die von Null verschieden ist, so können nicht sämtliche anziehende Massenpunkte aufserhalb der Fläche liegen.

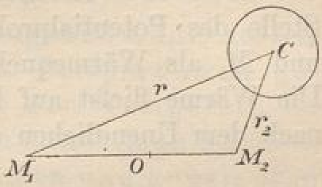
117) Der Kugelsatz von Gaufs.

Wiederum diene das symmetrische Zweipunktsystem mit positiven Massen M_1 und M_2 von der Gröfse 1 als einleitendes Beispiel. Um irgend einen Punkt C sei eine Kugel gelegt, die M_1 und M_2 ausschliefst. Jede Einheit ihrer Oberfläche sei mit der Masse 1 belegt.

Die Summe der Potentialwerte für die Kugeloberfläche soll gebildet werden.

Alle Rechnung wird dadurch erspart, dafs man sich umgekehrt die homogene Kugelfläche als anziehend wirkend auf M_1 und M_2 denkt, nur sind diese beiden Punkte starr verbunden zu denken, damit ihre gegenseitige Einwirkung aufgehoben wird. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist dann das Resultat dasselbe. Nach Nr. 25 hat man sich die Belegung $4\varrho^2\pi$ im Mittelpunkte C vereinigt zu denken. Nach dem Satze von der Arbeit sind beide Potentiale algebraisch zu addieren, es handelt sich also um

Fig. 88.



$$\frac{4\varrho^2\pi}{r_1} + \frac{4\varrho^2\pi}{r_2} = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = P.$$

Folglich ist auch die Summe der Potentialwerte von M_1 und M_2 für alle Punkte der Kugeloberfläche

$$P_k = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Nun ist aber das Potential der Punkte M_1 und M_2 für den Punkt C von der Gröfse

$$P = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

demnach ist zugleich

$$P = \frac{P_k}{4\varrho^2\pi}.$$

Letzteres ist aber nichts anderes als der Mittelwert der Potentialwerte von M_1 und M_2 in den Punkten der Kugeloberfläche, der Potentialwert von M_1 und M_2 für den Punkt C ist also gleich dem Mittelwerte der Potentialwerte für sämtliche Punkte der Kugeloberfläche.

Ganz dieselbe Betrachtung kann man für drei, ganz allgemein für n feste Massenpunkte von beliebiger Masse anstellen, nur müssen diese sämtlich aufserhalb der homogen mit Dichte 1 belegten Kugeloberfläche liegen. Diese Massenpunkte können auch kontinuierliche Körper, Flächen und Linien bilden. Daher gilt ganz allgemein der von Gaufs aufgestellte Satz:

Wird durch irgend welche Massen, die aufserhalb einer Kugelfläche liegen, auf die homogene Massenbelegung der letzteren eine dem Newtonschen Gesetze folgende Anziehung ausgeübt, so ist der mittlere Potentialwert für die Punkte der Kugeloberfläche gleich dem Potentialwerte für den Mittelpunkt der Kugel.

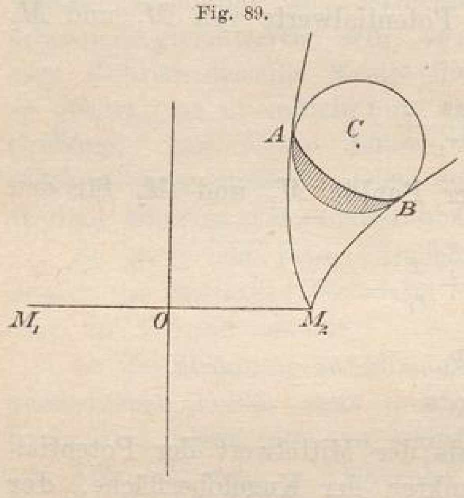
118) Physikalische Deutungen des Gaufsschen Kugelsatzes.

Setzt man in der vorigen Betrachtung das Wärmeproblem an Stelle des Potentialproblems, so sind für das gewählte Beispiel M_1 und M_2 als Wärmequellen von konstanter Temperatur zu betrachten. Die Wärme fliefst auf Kurven von der Gleichung $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ nach dem Unendlichen ab, die Isothermenflächen sind von der Gestalt

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c.$$

Diese Flächen schneiden die um C gelegte Kugelfläche. Da an Stelle der Potentialwerte in den einzelnen Punkten Temperaturen treten, so folgt, dafs die Temperatur im Mittelpunkte C der Kugel gleich der mittleren Temperatur ihrer Oberflächenpunkte ist.

Fig. 89.



Das Einströmen der Wärme geschieht in dem schraffierten Teile der Kugelfläche, der von einer sphärischen Kurve AB begrenzt ist, das Ausströmen im Reste der Fläche. Da die Wärmeströmung als stationär angenommen ist, fliefst ebensoviel Wärme ein, wie aus (der Kraftflufs ist für die Kugel gleich Null).

Durch die geschlossene Linie AB wird die in Frage kommende Kraftröhre, welche die Kugelfläche berührt, abgegrenzt. Längs dieser Linie tritt keine Wärme in die Kugel ein, auch nicht aus ihr heraus. Die in jeder kleinen Kraftröhre fliefsenden Wärmemengen sind uns bekannt.

Dieselbe Betrachtung gilt für elektrische Strömungen entsprechender Art.

119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem.

Man denke sich jetzt die Kugel aus ihrer Umgebung herausgelöst, halte aber jeden Punkt ihrer Oberfläche konstant auf derselben Temperatur, die ihm vorher zukam, so wird sich in dem homogenen Innenraum dieselbe stationäre Strömung einstellen, wie vorher. Ist