



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

der Kugeloberfläche gleich dem Potentialwerte für den Mittelpunkt der Kugel.

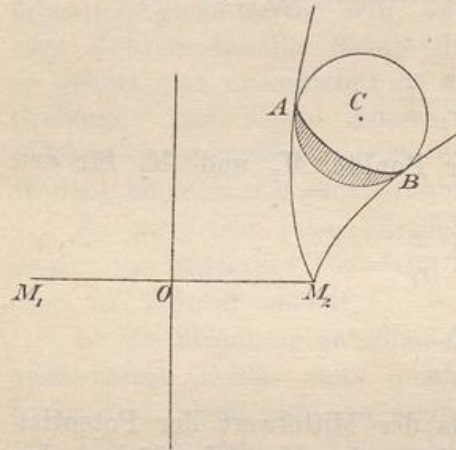
118) Physikalische Deutungen des Gaußschen Kugelsatzes.

Setzt man in der vorigen Betrachtung das Wärmeproblem an Stelle des Potentialproblems, so sind für das gewählte Beispiel M_1 und M_2 als Wärmequellen von konstanter Temperatur zu betrachten. Die Wärme fließt auf Kurven von der Gleichung $\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c$ nach dem Unendlichen ab, die Isothermenflächen sind von der Gestalt

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c.$$

Diese Flächen schneiden die um C gelegte Kugeloberfläche. Da an Stelle der Potentialwerte in den einzelnen Punkten Temperaturen treten, so folgt, daß die Temperatur im Mittelpunkte C der Kugel gleich der mittleren Temperatur ihrer Oberflächenpunkte ist.

Fig. 89.



Das Einströmen der Wärme geschieht in dem schraffierten Teile der Kugeloberfläche, der von einer sphärischen Kurve AB begrenzt ist, das Ausströmen im Reste der Fläche. Da die Wärmeströmung als stationär angenommen ist, fließt ebensoviel Wärme ein, wie aus (der Kraftfluß ist für die Kugel gleich Null).

Durch die geschlossene Linie AB wird die in Frage kommende Kraftrohre, welche die Kugeloberfläche berührt, abgegrenzt. Längs dieser Linie tritt keine Wärme in die Kugel ein, auch nicht aus ihr heraus. Die in jeder kleinen Kraftrohre fließenden Wärmemengen sind uns bekannt.

Dieselbe Betrachtung gilt für elektrische Strömungen entsprechender Art.

119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem.

Man denke sich jetzt die Kugel aus ihrer Umgebung herausgelöst, halte aber jeden Punkt ihrer Oberfläche konstant auf derselben Temperatur, die ihm vorher zukam, so wird sich in dem homogenen Innenraum dieselbe stationäre Strömung einstellen, wie vorher. Ist

dieser Zustand hergestellt, so hat man dieselben Stromlinien und dieselben Isothermenflächen wie vorher. In dem schraffierten Teile der Oberfläche muß man Wärme in demselben Maße wie vorher zuführen, im andern Teile abführen, um die Temperaturen konstant zu erhalten. Die Summe der zuzuführenden Gesamtwärme ist Null.

Man hat also folgende besondere Aufgabe gelöst:

Die Punkte der Oberfläche einer homogenen Kugel sollen durch Zu- und Abfluß auf konstanten Temperaturen gehalten werden, und zwar so, daß diese den Temperaturen entsprechen, die den Oberflächenpunkten zukommen würden, wenn aus zwei außerhalb liegenden gleichen und konstanten Wärmequellen M_1 und M_2 Wärme nach dem unendlichen Bereiche abströmt. Für den sich einstellenden stationären Zustand soll folgendes bestimmt werden: a) Die Gestalt der Stromlinien, b) die Gestalt der Isothermenflächen, c) die Temperatur jedes Punktes im Innern, d) die Menge der auf jeder Einheit der Oberfläche zu- oder abströmenden Wärme, e) die Oberfläche soll in ein Netz von Kraftfeldern potentieller Gleichwertigkeit eingeteilt werden, so daß in sämtlichen Kraftröhren dieselbe Wärmemenge fließt.

Zu c) ist zu bemerken, daß der Mittelpunkt C die mittlere Temperatur der Oberfläche erhält, zu d) daß die Summe der zuzuführenden Wärme gleich Null sein muß.

Dieselbe Aufgabe ist für jedes der elementaren Behandlung zugängliche Mehrpunktproblem gelöst, sobald nur sämtliche Quellpunkte außerhalb der Kugeloberfläche liegen. Bei drei auf gerader Linie liegenden Punkten z. B., die auf konstanten Temperaturen t_1 , t_2 , t_3 gehalten werden, handelt es sich um die Stromlinien $t_1 \cos \vartheta_1 + t_2 \cos \vartheta_2 + t_3 \cos \vartheta_3 = c$ und um die Niveauflächen

$$\frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} + \frac{t_3}{r_3} = c.$$

Hat der Kugelmittelpunkt von M_1 , M_2 , M_3 die Entfernungen e_1 , e_2 , e_3 , so ist die Temperatur in ihm von der Höhe

$$\frac{t_1}{e_1} + \frac{t_2}{e_2} + \frac{t_3}{e_3},$$

und dies ist die Mitteltemperatur für die Oberfläche.

So erhält man eine ganze Reihe lösbarer Fälle der allgemeineren Fourierschen Kugelaufgabe, welche lautet:

Auf einer Kugeloberfläche sei jedem Punkte eine bestimmte Temperatur vorgeschrieben. Der stationäre Wärmezustand des Kugelinnern soll bestimmt werden.

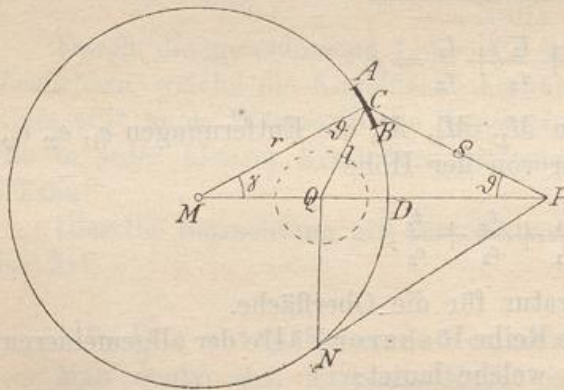
Entsprechende Aufgaben für elektrische Strömungen innerhalb der Kugel aufzustellen, sei dem Leser überlassen. Auch dabei muß die Summe der zugeführten Elektrizitäten gleich Null sein.

[Von der Lösung der allgemeinen Kugelaufgabe, die mit Hilfe der sogenannten Kugelfunktionen zu erfolgen hat, kann hier selbstverständlich nicht die Rede sein. Es handelt sich nur darum, einen vorläufigen Begriff von jenem interessanten und schwierigen Gebiete der höheren Mathematik und der mathematischen Physik zu geben, bei dem man selbstverständlich auch andere Flächen, z. B. Cylinderflächen, Kegelflächen, Hyperboloid-, Paraboloid-, Ellipsoidflächen u. s. w. benutzen kann. Die Lösung solcher Aufgaben beansprucht wieder die Kenntnis besonderer Funktionen, der Cylinderfunktionen u. s. w. Die für die Oberfläche vorgeschriebenen Werte bezeichnet man als die Randbedingungen des Problems. Statt die Strömung im Innenraume der Kugel zu betrachten, kann man auch die im Außenraume stattfindende betrachten, wobei die Punkte wiederum auf konstanten Temperaturen gehalten werden, aber M und M_1 einerseits, der unendliche Bereich andererseits als Zu- oder Abströmungsgebiete zu betrachten sind. So giebt der Laplacesche Satz Einblick in Gebiete der modernen Physik und Mathematik, auf denen Fourier, Green, Gauß, Riemann, Dirichlet, Jacobi, Neumann und andere erfolgreich gearbeitet haben.]

120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art.

In Nr. 25 war gezeigt, daß $\varrho = \frac{le}{r}$ ist (Fig. 90). Die Anziehung des Bogens $AB = s$ auf P ist bei dem zweidimensionalen

Fig. 90.



Probleme durch $\frac{s}{e}$ oder $\frac{sr}{le}$ gegeben, die in die Linie MP fallende Komponente also durch $\frac{sr}{le} \cos \vartheta$. Die Summe sämtlicher Bogenteilchen giebt

$$\frac{r}{e} \sum \frac{s \cos \vartheta}{l},$$

wobei, ähnlich wie früher, $\frac{s \cos \vartheta}{l}$ als Projektion jedes

Bogens $s = AB$ auf den um den reciproken Punkt Q geschlagenen Einheitskreis betrachtet werden kann, so daß