Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art

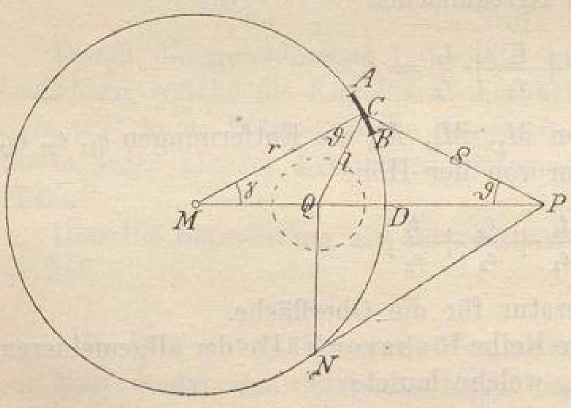
Entsprechende Aufgaben für elektrische Strömungen innerhalb der Kugel aufzustellen, sei dem Leser überlassen. Auch dabei mufs die Summe der zugeführten Elektrizitäten gleich Null sein.

[Von der Lösung der allgemeinen Kugelaufgabe, die mit Hilfe der sogenannten Kugelfunktionen zu erfolgen hat, kann hier selbstverständlich nicht die Rede sein. Es handelt sich nur darum, einen vorläufigen Begriff von jenem interessanten und schwierigen Gebiete der höheren Mathematik und der mathematischen Physik zu geben, bei dem man selbstverständlich auch andere Flächen, z. B. Cylinderflächen, Kegelflächen, Hyperboloid-, Paraboloid-, Ellipsoidflächen u. s. w. benutzen kann. Die Lösung solcher Aufgaben beansprucht wieder die Kenntnis besonderer Funktionen, der Cylinderfunktionen u. s. w. Die für die Oberfläche vorgeschriebenen Werte bezeichnet man als die Randbedingungen des Problems. Statt die Strömung im Innenraume der Kugel zu betrachten, kann man auch die im Aufsenraume stattfindende betrachten, wobei die Punkte wiederum auf konstanten Temperaturen gehalten werden, aber M und M_1 einerseits, der unendliche Bereich andererseits als Zu- oder Abströmungsgebiete zu betrachten sind. So giebt der Laplacesche Satz Einblick in Gebiete der modernen Physik und Mathematik, auf denen Fourier, Green, Gaufs, Riemann, Dirichlet, Jacobi, Neumann und andere erfolgreich gearbeitet haben.]

120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art.

In Nr. 25 war gezeigt, dafs $\varrho = \frac{le}{r}$ ist (Fig. 90). Die Anziehung des Bogens $AB = s$ auf P ist bei dem zweidimensionalen Probleme durch $\frac{s}{\varrho}$ oder $\frac{sr}{le}$ gegeben, die in die Linie MP fallende Komponente also durch $\frac{sr}{le} \cos \vartheta$. Die Summe sämtlicher Bogenteilchen giebt

Fig. 90.



$$\frac{r}{e} \sum \frac{s \cos \vartheta}{l},$$

wobei, ähnlich wie früher, $\frac{s \cos \vartheta}{l}$ als Projektion jedes Bogens $s = AB$ auf den um den reciproken Punkt Q geschlagenen Einheitskreis betrachtet werden kann, so dafs

$$\sum \frac{s \cos \vartheta}{l} = 2\pi,$$

die Gesamtwirkung also gleich

$$\frac{r}{e} 2\pi = \frac{m}{e}$$

ist, wo m die Belegung des Umfangs ist. Folglich:

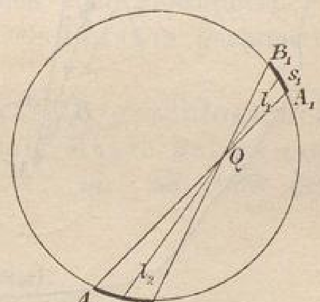
Die Anziehung des homogenen Kreisumfangs auf einen äufseren Punkt nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials ist so grofs, als ob die Gesamtbelegung im Centrum M vereinigt wäre.

Von hier aus führen wörtlich dieselben Schlüsse zu einem Satze über den Kreis, der dem Kugelsatze ganz analog ist. Werden z. B. die Punkte eines Kreises auf konstanten Temperaturen gehalten, so ist für den stationären Zustand der dünnen Kreisplatte das System der Strom- und Niveaulinien bestimmbar, ebenso die Temperatur jedes Punktes. Die des Mittelpunktes ist das arithmetische Mittel der Randtemperaturen.

Beispiele darüber sollen später gegeben werden.

121) **Bemerkung.** Befindet sich der angezogene Punkt in Q, so entspricht jedem kleinen Bogen s_1 ein gegenüberliegender s_2. Die kleinen Dreiecke $A_1 B_1 Q$ und $A_2 B_2 Q$ sind nach dem bekannten Sehnensatze ähnlich. Demnach gilt für die Mittellinien l_1 und l_2, dafs $\frac{s_1}{l_1} = \frac{s_2}{l_2}$ ist. Ziehen sich also die Massen nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials an, so ist der Punkt Q unter dem Einflusse von l_1 und l_2 in Ruhe.

Fig. 91.



Aus

$$\frac{s_1}{\varrho_1} \cos \vartheta = \frac{s_1 r}{l_1 e} \cos \vartheta$$

und

$$\frac{s_2}{\varrho_2} \cos \vartheta = \frac{s_2 r}{l_2 e} \cos \vartheta$$

folgt für die Anziehung von P auf einem Bogen $A_1 B_1$ und seinem Gegenbogen $A_2 B_2$ in Bezug auf den reciproken Punkt Q, dafs beide Anziehungen gleich stark sind. (Vgl. Nr. 25.)

Über homogene Kreisscheiben und Kreisringe lassen sich also ganz analoge Schlüsse ziehen, wie früher über homogene Voll- und Hohlkugeln.