Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

122) Der Spannungssatz von Poisson

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

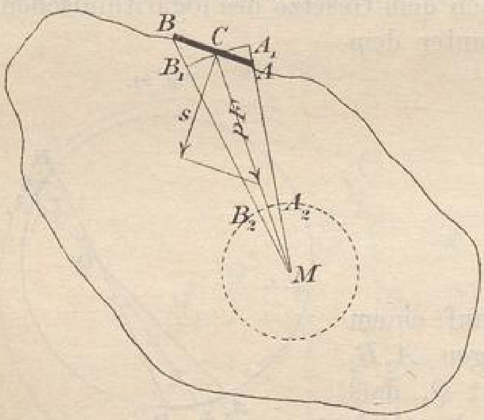
Die zweidimensionalen Probleme gelten auch für das Newtonsche Potential, sobald man annimmt, es handle sich nur um den Normalschnitt unbegrenzter Cylinder und von Systemen unbegrenzter paralleler Geraden.

122) Der Spannungssatz von Poisson.

Im Mittelpunkte einer Kugel befinde sich die Masse 1. Ihre Oberfläche habe eine Massenbelegung von der Dichte 1. Jedes Flächenteilchen F wird von der Kraft $\frac{F}{r^2}$ nach innen gezogen. (Die Gravitationskonstante k ist gleich 1 gesetzt.) Ist z. B. $r = 1$, so ist seine Anziehung gleich F. Im allgemeinen ist die Massenbelegung gleich $4r^2\pi$. Angenommen, die Einzelkräfte ließen sich algebraisch summieren, was nicht der Fall ist, so würde die Anziehung gleich $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$ sein. Man hat sich trotz der Unzulässigkeit dieser Addition zu der Ausdrucksweise geeinigt, der Innenraum stände unter der Spannung 4π. Faraday drückt sich so aus, daſs er sagt, der Kraftfluſs des Problems sei gleich 4π. Ist dagegen im Mittelpunkte die Masse m vereinigt, so handelt es sich um die Spannung bezw. den Kraftfluſs $4\pi m$.

Lag der anziehende Punkt auſserhalb der Kugel, so war in jeder Zelle der Kraftfluſs gleich Null, jene Addition machte also keine Bedenken. Das Bedenken schwindet auch hier, wenn man den Vergleich mit der inkompressiblen Flüssigkeit heranzieht. Durch jeden Normalschnitt der einzelnen Kraftröhre strömt sekundlich (abgesehen von der Konstante k) die Flüssigkeitsmenge $Fv = \frac{F}{r^2}$, durch die ganze Oberfläche also die Menge $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$. Dadurch ist dem hier etwas fremdartig klingenden Spannungsbegriffe wenigstens eine annehmbare physikalische Bedeutung gegeben. Seine Brauchbarkeit wird sich in den folgenden Beispielen ergeben.

Fig. 92.



Ist die Fläche in sich geschlossen, der Innenraum einfach zusammenhängend (d. h. so beschaffen, daſs jeder ebene Schnitt den Zusammenhang aufhebt, nicht, wie bei einer Ringfläche, ihn bestehen läſst), so ist die von der Einheit in M auf jede Fläche AB ausgeübte Kraft $pF = \frac{F}{r^2}$. Sie zerlegt sich wie früher in einen unwirksamen Teil und in einen wirksamen Spannungsteil

$$s = pF \cos\alpha = \frac{F}{r^2} \cos\alpha,$$

was sich wiederum deuten läfst als Projektion von AB auf die um M geschlagene Einheitskugel, für die wirklich

$$A_2 B_2 = \frac{AB \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

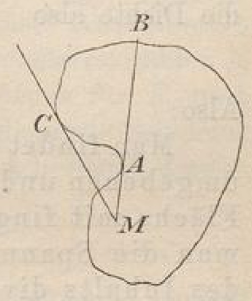
ist, sobald CM und die Normale in C den Winkel α einschliefsen. Demnach ist

$$\sum pF \cos\alpha = \sum (A_2 B_2) = 4\pi,$$

d. h. dies ist die Spannung, unter welcher der Innenraum steht.

Finden Ausbuchtungen statt, die durch eine von M ausgehende Tangentialebene MAB begrenzt werden, so verhält sich M gegen den Teil ABC wie ein äufserer Punkt. Der Beitrag der Ausbuchtung für die Spannung ist demnach gleich Null. Der Satz bleibt also bestehen. Untersuchungen über mehrfach zusammenhängende Räume, wie sie von Neumann und Helmholtz angestellt sind, sollen hier unterbleiben.

Fig. 93.



Befinden sich mehrere anziehende Massenpunkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ im Innern, so sind die betreffenden Spannungsnormalen überall zu addieren, es handelt sich also um die Gesamtspannung

$$4\pi (m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Für elektrische und magnetische Untersuchungen können die m teils positiv, teils negativ sein. Die Punkte können auch kontinuierliche Körper bilden. So ergiebt sich folgender nach Poisson genannter, aber auch von Gaufs behandelter Satz:

Befinden sich im Innern einer in sich geschlossenen Fläche, die homogen in der Dichte 1 mit Masse belegt ist, Massen oder Massengebilde $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, so steht der Raum unter der Spannung

$$4\pi (m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Ebenso grofs ist nach Faradays Anschauung der Kraftflufs.

Wenn im folgenden von der Spannung, unter der ein von geschlossener Fläche umgrenzter Raum steht, gesprochen wird, so ist dabei immer eine fingierte Massenbelegung von der Dichte 1 auf der Fläche angenommen. Der Kürze halber soll dies nicht mehr besonders hervorgehoben werden. Man erkennt aus obigem, daſs der Spannungsbegriff ebenso, wie das Potential, seine Kraft in der Möglichkeit der algebraischen Addition hat.

123) Zusammenhang zwischen Dichte und Spannung. Man denke sich einen massiven Körper, dessen Dichtigkeit zwar an verschiedenen Stellen verschieden ist, aber überall nur stetig veränderlich und nirgends unendlich groſs, so daſs in der nächsten Umgebung jeder Stelle von einer mittleren Dichte gesprochen werden kann. Irgendwo im Innern des Körpers denke man sich eine kleine, im obigen Sinne in sich geschlossene Fläche. Unter welcher Spannung steht dieselbe? Nach dem Laplaceschen Satze giebt die äuſsere Masse die Spannung Null. Nach dem Poissonschen steht sie unter der Spannung $4\pi m$, wenn m die eingeschlossene Masse ist. Bedeutet nun J den geometrischen Inhalt des Raumes, δ die mittlere Dichte der Massenanfüllung im Innern der Fläche (bei unendlich kleinen Dimensionen der Dichte δ selbst), so ist $m = J\delta$, also die Spannung

$$s = 4\pi J\delta,$$

die Dichte also

$$\delta = \frac{s}{4\pi J}.$$

Also:

Man findet die Dichte innerhalb einer kleinen von Masse umgebenen und Masse umschlieſsenden in sich geschlossenen Fläche mit fingierter Flächenbelegung von Dichte 1, indem man die Spannung, unter der sie steht, durch das 4πfache des Inhalts dividiert.

Dieser Satz ist namentlich für die Lehre vom Magnetismus und für die Elektrostatik von Bedeutung. Besonders bei den Influenzproblemen findet er Anwendung. Bei Influenzproblemen handelt es sich jedoch um Flächenbelegungen. Befindet sich im Innern der in sich geschlossenen Fläche, die z. B. die Gestalt einer Raumzelle haben kann, ein kleines Flächenstück F mit der Belegung m, deren mittlere Dichte δ ist, so ist zunächst $m = \delta F$, so daſs jetzt die Spannung des Raums nur $s = 4\pi F\delta$ und die Dichte $\delta = \frac{s}{4\pi F}$ ist.

124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen. Auf der Oberfläche eines Konduktors sammle sich Elektrizität in dünner Schicht an, sei es in Folge von Ladung, oder von Influenz, oder infolge des Zusammenwirkens von Ladung und Influenz. Es herrsche Gleichgewicht der wirkenden Kräfte, so daſs die Elektrizität in Ruhe ist. AB sei ein kleiner Teil der Oberfläche des Konduktors, die