Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

hervorgehoben werden. Man erkennt aus obigem, dafs der Spannungsbegriff ebenso, wie das Potential, seine Kraft in der Möglichkeit der algebraischen Addition hat.

123) Zusammenhang zwischen Dichte und Spannung. Man denke sich einen massiven Körper, dessen Dichtigkeit zwar an verschiedenen Stellen verschieden ist, aber überall nur stetig veränderlich und nirgends unendlich grofs, so dafs in der nächsten Umgebung jeder Stelle von einer mittleren Dichte gesprochen werden kann. Irgendwo im Innern des Körpers denke man sich eine kleine, im obigen Sinne in sich geschlossene Fläche. Unter welcher Spannung steht dieselbe? Nach dem Laplaceschen Satze giebt die äufsere Masse die Spannung Null. Nach dem Poissonschen steht sie unter der Spannung $4\pi m$, wenn m die eingeschlossene Masse ist. Bedeutet nun J den geometrischen Inhalt des Raumes, δ die mittlere Dichte der Massenanfüllung im Innern der Fläche (bei unendlich kleinen Dimensionen der Dichte δ selbst), so ist $m = J\delta$, also die Spannung

$$s = 4\pi J\delta,$$

die Dichte also

$$\delta = \frac{s}{4\pi J}.$$

Also:

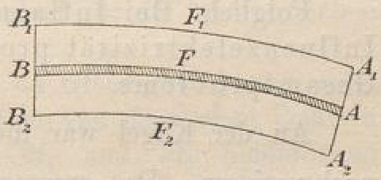
Man findet die Dichte innerhalb einer kleinen von Masse umgebenen und Masse umschliefsenden in sich geschlossenen Fläche mit fingierter Flächenbelegung von Dichte 1, indem man die Spannung, unter der sie steht, durch das 4πfache des Inhalts dividiert.

Dieser Satz ist namentlich für die Lehre vom Magnetismus und für die Elektrostatik von Bedeutung. Besonders bei den Influenzproblemen findet er Anwendung. Bei Influenzproblemen handelt es sich jedoch um Flächenbelegungen. Befindet sich im Innern der in sich geschlossenen Fläche, die z. B. die Gestalt einer Raumzelle haben kann, ein kleines Flächenstück F mit der Belegung m, deren mittlere Dichte δ ist, so ist zunächst $m = \delta F$, so dafs jetzt die Spannung des Raums nur $s = 4\pi F\delta$ und die Dichte $\delta = \frac{s}{4\pi F}$ ist.

124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen. Auf der Oberfläche eines Konduktors sammle sich Elektrizität in dünner Schicht an, sei es in Folge von Ladung, oder von Influenz, oder infolge des Zusammenwirkens von Ladung und Influenz. Es herrsche Gleichgewicht der wirkenden Kräfte, so dafs die Elektrizität in Ruhe ist. AB sei ein kleiner Teil der Oberfläche des Konduktors, die

selbst zu den Niveauflächen gehört, denn die wirkenden Kräfte müssen senkrecht gegen sie gerichtet sein, da sonst die elektrischen Teilchen sich nicht in Ruhe befinden könnten. $A_1B_1B_2A_2$ sei eine Raumzelle des Problems, A_1A_2 also eine von Kraftlinien gebildete Grenzfläche, ebenso B_1B_2, dagegen seien A_1B_1 und A_2B_2 benachbarte Niveauflächen. Die auf der Fortsetzung der Konduktoroberfläche befindlichen elektrischen Belegungen, ebenso die etwa influenzierend wirkenden sonstigen elektrischen Massen befinden sich aufserhalb der Zellen, geben also zur Spannung den Beitrag Null. Ist m die Masse der Belegung AB, so steht der Zellenraum nach Poisson unter der Spannung $4\pi m$. Man lasse nun A_1B_1 und A_2B_2 sehr nahe aneinander rücken, so dafs die Dimensionen von A_1A_2 und B_1B_2 gegen die von AB, A_1B_1 und A_2B_2 vernachlässigt werden können. Die Gesamtwirkung der sämtlichen vorhandenen Elektrizitäten, der äufseren und inneren, auf jede Seitenfläche der Zelle giebt, da A_1A_2 und B_1B_2 Kraftlinien sind, keine nach innen oder aufsen gehenden Resultanten, diese fallen vielmehr in die Kraftlinien selbst. Also kommen nur die senkrecht gegen F_1 und F_2 gerichteten Einheitsresultanten p_1 und p_2 des Gesamtproblems zur Sprache. Diese mögen für F_1 nach innen, für F_2 nach aufsen gerichtet sein. Die verbleibende Spannung $p_1F_1 - p_2F_2$ mufs nach Poisson gleich $4\pi m$ sein, d. h. gleich $4\pi F\delta$, was die Gleichung

Fig. 94.



$$p_1F_1 - p_2F_2 = 4\pi F\delta$$

giebt. Da aber A_1B_1 und A_2B_2 unendlich nahe aneinander gerückt sind, kann man $F_1 = F_2 = F$ setzen, so dafs die Gleichung übergeht in

$$p_1 - p_2 = 4\pi\delta.$$

Daraus ergiebt sich als Dichte der Belegung

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{4\pi}.$$

Die Dichte der Flächenbelegung ist also der Quotient aus der Differenz der Einheitsresultanten des Problems auf beiden Seiten der Belegung und der Zahl 4π. Nach Nr. 27 kann $p_1 - p_2$ z. B. beim Passieren einer Fläche endliche Werte annehmen, ebenso in den nachstehenden Fällen.

Liegt nun die Fläche F_2 in der leitenden Masse des Konduktors, so ist die auf sie pro Einheit der Belegung wirkende Resultante p_2 des Problems gleich Null, denn sonst würden dort noch scheidende

Kräfte wirken, während Ruhe vorausgesetzt ist. In diesem Falle also wird

$$\delta = \frac{p_1}{4\pi}.$$

Jetzt also gilt der Satz:

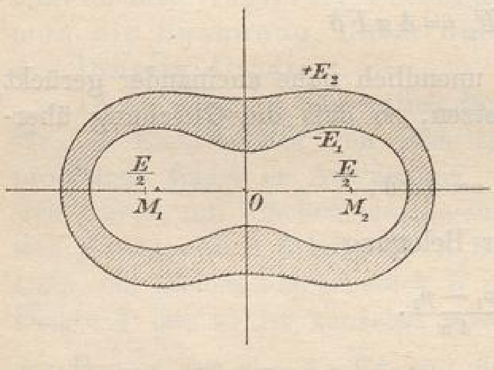
Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der elektrischen Belegung des Konduktors an jeder Stelle gleich dem Quotienten aus der dort auf die Einheit wirkenden Resultante des Gesamtproblems und der Gröfse 4π.

Folglich: Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der Influenzelektrizität proportional der Einheitsresultante des Gesamtproblems.

An der Kugel war die Richtigkeit des Gesetzes $\delta = \frac{p_1}{4\pi}$ bereits nachgewiesen. Das symmetrische Zweipunktproblem wird die Sache noch klarer erläutern.

125) Influenz auf den Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems. Ein metallischer Hohlkörper werde von zwei Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems begrenzt, also von zwei durch $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ charakterisierten Flächen. Man denke sich in den Punkten M_1 und M_2 die elektrische Masse $+E$ zu gleichen Teilen angebracht. Durch elektrische Scheidung sammelt sich an der Innenwand Influenzelektrizität $-E_1$, an der Aufsenwand $+E_2$ an. Wird der Leiter mit der Erde verbunden, so entflieht die letztere nach der Erde. Ist Gleichgewicht eingetreten, so herrscht innerhalb der Metallmasse die elektrische Scheidungskraft Null, d. h. das Potential ist konstant und zwar gleich dem der Erde, welches nach Nr. 60 als Null aufzufassen ist. Die $-E_1$ ordnet sich also an der Innenwand so an, dafs die gesamte Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach aufsen hin gleich Null ist.

Fig. 95.



Daraus folgt zunächst, dafs die Mengen $+E$ und $-E_1$ gleich grofs sind. Wären nämlich die Mengen verschieden, so würde bei gröfserer Entfernung von einem gegenseitigen Aufheben der Wirkungen nicht die Rede sein, da für gröfsere Entfernungen die Wirkung doch