Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

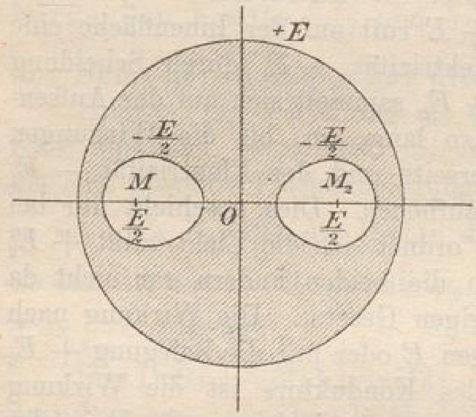
127) Allgemeinere Zweipunktprobleme und damit verbundene Induktionsprobleme

Auflösung. Die Ladung $+E$ ruft auf der Kugelfläche die gleich große Menge $-E_1$ hervor, die sich gleichmäßig verteilt, so daß die Wirkung beider nach außen gleich Null wird. Die gleich große Menge $+E_2$ sammelt sich auf der Außenfläche an und verteilt sich so, als ob die beiden andern nicht da wären, d. h. nach dem oben besprochenen Gesetze des Zweipunktproblems.

Die Wirkung nach außen wird so, als ob Ladungen $+\frac{E}{2}$ in M_1 und M_2 vorhanden wären. In der Masse des Konduktors ist die Wirkung gleich Null. Im Hohlraum wirkt nur die Ladung von O.

b) Die Ladungen $\frac{E}{2}$ befinden sich in M_1 und M_2, der Konduktor wird innen von einer der Niveauflächen des Zweipunktproblems begrenzt (oder von zwei getrennten Ovalen), die Außenfläche sei eine Kugel mit O als Centrum.

Fig. 97.



Auflösung. Auf der Innenfläche geschieht die Ansammlung von $-E_1$ nach dem Gesetz des Zweipunktproblems, die Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach außen ist Null. Auf der Kugel sammelt sich $+E_2$ homogen verteilt an, als ob die beiden andern nicht da wären. Die Wirkung nach außen ist so, als ob $+E$ in O allein vorhanden wäre. Die Wirkung in der Masse des Konduktors ist Null. Die Wirkung im Hohlraum ist die des Zweipunktproblems für M_1 und M_2.

Aus a) und b) ergiebt sich, daß man von dem, was auf der Oberfläche geschieht, nicht auf das schließen darf, was im Innern des Konduktors vor sich geht.

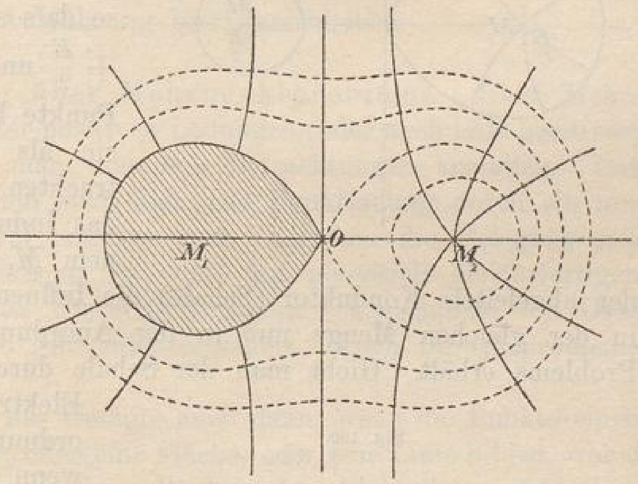
127) Allgemeine Zweipunktprobleme und damit verbundene Induktionsprobleme.

Es sei dem Leser als leichte Übung überlassen, die entsprechende Betrachtung auf ungleiche positive Ladungen der Punkte M_1 und M_2 auszudehnen. Die Anordnung wird stets so, daß man die Ladung beider Punkte durch die entsprechende Belegung jedes Ovals, welches beide umschließt, ersetzen kann, sobald es sich um die Wirkung nach außen handelt. An Stelle eines solchen Ovals können aber auch zwei zusammengehörige der getrennten Ovale eintreten, die bei gleichen

Ladungen symmetrisch sind. Endlich kann jeder einzelne der Punkte durch ein ihn umschliefsendes Oval ersetzt werden.

In Fig. 98 ist dies beispielsweise so dargestellt, dafs die Ladung in M_1 durch eine ebenso grofse Ladung auf der einen Hälfte der durch O gehenden Kurve ersetzt ist. Ohne die Mitwirkung von M_2 würde die Verteilung der Ladung auf der Konduktorfläche eine ganz andere werden. Bringt man aber nach M_2 dieselbe Ladung $+E$, so bilden sich beide Arten von Induktionselektrizität, an jeder Stelle heben die entgegengesetzten Elektrizitäten in gleichen Quantitäten einander auf, gleichartige aber summieren sich, und so entsteht eine Anordnung, die genau der des ursprünglichen Zweipunktproblems entspricht. Man kann den einen Konduktor auch massiv machen, ohne dafs sich etwas ändert. Scheidende Kräfte treten eben im Innern nicht mehr auf. Die Wirkung der Ladung der Oberfläche und des Punktes M_2 zusammengenommen auf das Innere der Metallmasse ist gleich Null.

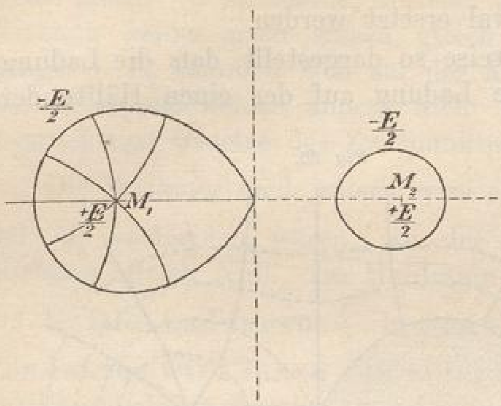
Fig. 98.



Statt die Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche abströmen zu lassen, kann man folgendes machen. Man denke sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen elektrischen Mengen $\frac{E}{2}$ geladen und beide von einer Schale umgeben, die beide Punkte umschliefst und die Gestalt einer der Niveauflächen des Problems hat. Ladet man diese mit $-E$, so ordnet sich die Elektrizität von selbst dem Problem entsprechend an. Die Wirkung der Belegung nach innen ist Null, die Kraftlinien und Niveauflächen im Innern werden nur noch von M_1 und M_2 hervorgebracht, bleiben also die alten. Die Wirkung nach aufsen ist Null. (Vgl. Nr. 125.) Dasselbe erreicht man durch Induktionswirkung von M_1 und M_2 auf die abgeleitete Schale.

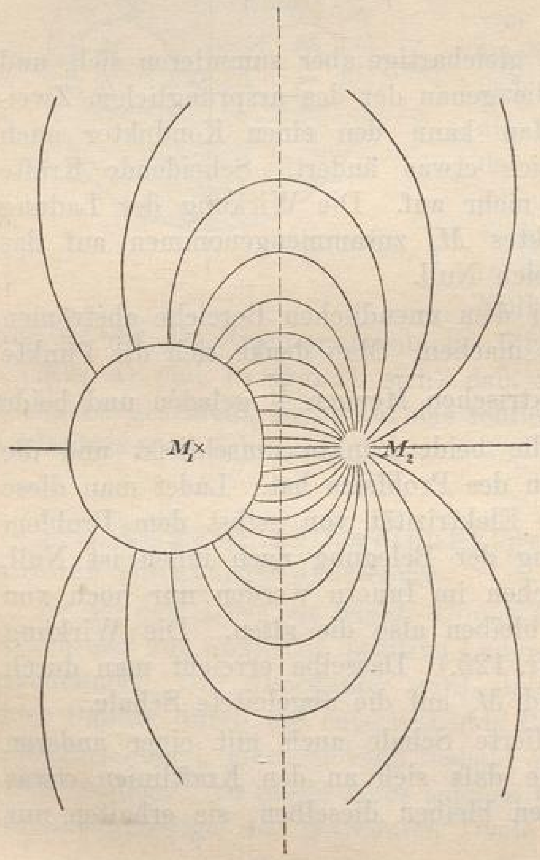
Man kann aber die isolierte Schale auch mit einer anderen Elektrizitätsmenge laden, ohne dafs sich an den Kraftlinien etwas ändert. Auch die Niveauflächen bleiben dieselben, sie erhalten nur andere Potentialwerte.

Fig. 99.



Dasselbe erreicht man mit getrennten Ovalen, die jene Punkte umschliefsen. Sie brauchen nicht gleich zu sein. Läfst man nun das um M_2 gelegte unendlich klein werden, so dafs sich dort die Ladungen $+\frac{E}{2}$ und $-\frac{E}{2}$ in demselben Punkte befinden, so kann man sie als nicht vorhanden betrachten. Dann stellt die Figur das Induktionsproblem dar, bei dem M_1 eine Ladung hat und der abgeleitete Konduktor (Schale) die Influenzelektrizität erster Art in der gleichen Menge und in der Anordnung des ursprünglichen Problems erhält. Giebt man der Schale durch Ladung eine andere Elektrizität, so bleibt die Anordnung nur dann dieselbe, wenn die gleiche Differenz im Punkte M_2 angebracht wird und influenzierend mitwirkt.

Fig. 100.



Diese Bemerkungen gestatten auch, den Fall entgegengesetzter Ladungen der Punkte M_1 und M_2 zu betrachten, bei dem Fig. 70 zur Geltung kommt.

Der Punkt M_1 mit Ladung $+E$ kann durch das ihn umschliefsende Oval mit der Ladung $+E$ ersetzt werden, ohne dafs sich an den Kraftlinien etwas ändert. Das Oval kann auch in die Symmetrieebene übergehen, es kann auch ein solches werden, welches M_2 umschliefst. Ob man die Ladung $+E$ giebt, oder den abgeleiteten Konduktor durch Influenz von M_2 aus ladet, ist gleichgültig.

Im Falle ungleicher Ladungen von M_1 und M_2 hat das Problem nicht die gezeichnete Symmetrieebene, wohl aber gehört nach Nr. 97 eine Kugel dazu. Das Problem der Influenz eines Punktes M_2 auf Ebene oder Kugel kann also an dieser Stelle ohne weiteres gelöst werden. Da dies jedoch von anderen Gesichtspunkten aus gelegentlich der elektrischen Bilder geschehen soll, deren Theorie hier schon vorbereitet ist, kann die Ausführung hier unterbleiben.

128) Bemerkung über Mehrpunktprobleme. Über Mehrpunktprobleme mit lauter positiven Ladungen (oder auch teils positiven, teils negativen) kann man dieselben Betrachtungen anstellen. Das Wichtigste ist, dafs man auch hier jede Punktladung durch ein nur sie umschliefsendes Oval ersetzen kann, bei dem die Belegung mit derselben Masse so geregelt ist, dafs auf potentiell gleichwertigen Feldern gleiche Mengen Elektrizität lagern. Umschliefst ein Oval mehrere der Punkte, so gilt entsprechendes. Auch Influenzprobleme lassen sich behandeln.

Grundsätzlich gilt das Gesagte auch dann, wenn die Punkte einen kontinuierlichen Körper, oder eine Fläche, oder eine Linie bilden, wobei die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten konstant oder veränderlich sein kann. Kennt man also die Niveauflächen und Kraftlinien eines Anziehungsproblems, so kann man das Problem benutzen, aus ihm auf obigem Wege gewisse andere Probleme zu lösen. Auf cylindrische und zweidimensionale Probleme kommen wir noch ausführlicher zurück. Die Betrachtungen des 5. Kapitels bieten dem Leser zahlreiche Übungsbeispiele. Der Kürze halber sei das Gesamtresultat nur für positive Ladungen angegeben.

Ladet man einen Leiter, dessen Gestalt durch die Niveaufläche eines bekannten Anziehungsproblems bestimmt ist, mit Elektrizität, so ordnet sich diese so an, dafs die Dichtigkeit der Flächenbelegung proportional den Einheitsresultanten des Anziehungsproblems für jede Stelle der Oberfläche ist, dafs also auf den potentiell gleichwertigen Feldern gleich viel elektrische Masse liegt. Die Wirkung der so angeordneten Elektrizität nach Innen ist gleich Null. Die Wirkung nach aufsen entspricht der der Kernladungen.

Wird der Leiter durch zwei Niveauflächen des Problems begrenzt und giebt man den Kernpunkten ihre Ladung, so ordnen sich die beiden Influenzelektrizitäten auf den Oberflächen nach dem obigen Gesetze an.

Ladet man zwei dünne Schalen, die nach Gestalt und Lage mit zwei Niveauflächen des Anziehungsproblems zusammenfallen, mit gleichartigen oder ungleichartigen Elek-