Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

129) Bemerkungen zur Theorie der Kraftlinien und der elektrischen Verschiebung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

trizitäten, so ordnet sich jede der beiden so an, als ob die andere gar nicht vorhanden wäre.

Denkt man sich um die geladene Kernmasse eines Anziehungsproblems eine in sich geschlossene dünne Schale, die nicht zu den Niveauflächen des Systems gehört und leitet man sie nach der Erde ab, so ordnet sich die Influenzelektrizität erster Art so an, dafs die gesamte Wirkung nach aufsen gleich Null ist, denn in der Masse des Leiters herrscht das konstante Potential der Erde (Null). Denkt man sich auf der Schale eine ponderable Massenbelegung, deren Dichtigkeit der der Elektrizität entspricht, so wirkt diese Belegung nach aufsen ebenso, wie die Kernmassen.

So erkennt man die Richtigkeit des folgenden wichtigen Satzes von Green:

Auf jeder beliebigen in sich geschlossenen Fläche, die eine gegebene kontinuierliche oder diskontinuierliche Massenverteilung umschliefst, läfst sich ponderable Masse so verteilen, dafs die Wirkung nach aufsen dieselbe ist, wie die der inneren Massen.

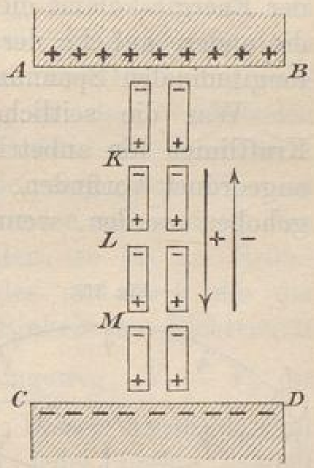
So läfst sich z. B. auf der Kugelfläche Masse so verteilen, dafs sie nach aufsen ebenso wirkt, wie beliebig viele Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ in ihrem Innern. Ferner läfst sich auf jeder geschlossenen Niveaufläche eines beliebigen Punktproblems Masse so verteilen, dafs sie nach aufsen wirkt, wie ein beliebiger Punkt im Innern. Für unendliche Entfernung sind die anziehenden Kräfte der einzelnen Teilchen parallel, die Resultante aber ist nach jenem Punkte hin gerichtet. Dieser Punkt ist wegen des Parallelismus der Kräfte der Schwerpunkt der Belegung. Man nennt eine solche Belegung eine centrobarische. Beispiele sollen in einem besonderen Kapitel gegeben werden.

Für den Greenschen Satz ist hier nur eine Art von Anschauungsbeweis gegeben. Der Existenzbeweis für die durch jene Belegung repräsentierte Funktion ist analytisch nur schwierig zu führen. Man kann also die obigen Betrachtungen als eine vorbereitende Einführung in wichtige Fragen der Funktionentheorie betrachten. Die folgenden Kapitel werden noch weiteren Einblick in die Folgerungen der Sätze von Laplace und Poisson geben.

129) Bemerkungen zur Theorie der Kraftlinien und der elektrischen Verschiebung. In Nr. 59 war gezeigt, in welcher Weise eine Ladung $+E$ des Leiters AB nach Faradays Ansicht die Polarisierung der längs der Kraftlinien angeordneten Moleküle hervorbringt. Dieselbe erfolgt schrittweise mit endlicher Geschwindigkeit. Sie setzt sich nach dem unendlichen Bereiche hin fort, wenn

die Kraftlinie nicht auf einen anderen Leiter trifft. Geschieht aber letzteres, so tritt auf dem zweiten Leiter Scheidung der Elektrizitäten ein. Enden sämtliche Kraftröhren in diesem, so ist die Influenzelektrizität erster Art auf ihm von derselben Menge, wie die Ladung, nur entgegengesetzt. Endet nur der n^{te} Teil der Kraftröhren in ihm, so ist sie von der Menge $-\frac{1}{n}E$. Am Anfang und Schlufs jeder Kraftröhre liegt auf beiden Leitern dieselbe Menge entgegengesetzter Elektrizitäten. Auf den Molekülen des Dielektrikums befinden sich entsprechende Quantitäten, und zwar sind diese auf jedem Teilchen nach den Endflächen hin zusammengedrängt. Es hat sich also in jedem Teilchen eine Verschiebung der positiven Elektrizitäten im Sinne des einen Pfeils, eine solche der negativen in der des andern Pfeils vollzogen. Fernwirkungen finden nicht statt, denn die entgegengesetzten Elektrizitäten zweier Nachbarmoleküle liegen so nahe beisammen, dafs ihre Wirkungen auf gröfsere Entferungen hin sich gegenseitig aufheben (neutralisieren) würden. Die an den Schlufsstellen der Kraftlinie im Dielektrikum liegenden scheinbar freien Elektrizitäten sind, wie bei einem Kondensator, durch die des benachbarten Leiters gebunden.

Fig. 101.

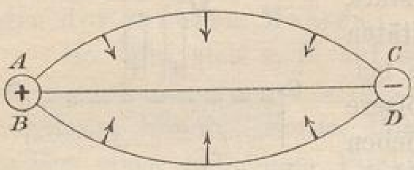


Dagegen findet zwischen den unmittelbar beieinander liegenden entgegengesetzten Elektrizitäten Anziehung, zwischen den gleichartigen Abstofsung statt. Die Anziehungen wirken longitudinal und sind bestrebt, die Kraftlinie zu verkürzen. Dieses Bestreben ruft eine gegenseitige Annäherung der beiden Leiter hervor, wenn diese beweglich sind. Wird diese Annäherung gehemmt, so erleidet die Kraftlinie eine longitudinale Zugspannung. Soll Gleichgewicht herrschen, so sind gleich grofse Gegenkräfte nötig. Diese Gegenkräfte kann man sich aus einem Bestreben des Dielektrikums erklären, die verschobenen Teilchen in die alte Lage zurückzuzwingen. Ist dies der Fall, so war bei der Verschiebung dieser Widerstand zu überwinden, d. h. eine Verschiebungsarbeit zu leisten. Diese Arbeit kann nur dadurch herbeigeführt sein, dafs man dem einen Leiter, z. B. AB durch die Ladung eine potentielle Energie verliehen hat, der Kugel z. B. die Energie $\frac{E^2}{2r}$, dem allgemein gestalteten Konduktor die Energie $\frac{V}{2}E$. (Ist nämlich V das Potential der Ladung am

Schlufs, so ist sein Mittelwert, da der Anfangswert o war, gleich $\frac{V}{2}$ zu setzen. Dies ist der mittlere Arbeitswert dafür, die Einheit aus unendlicher Entfernung auf den Konduktor zu schaffen. Für die Ladung E ist also die Arbeit $\frac{V}{2} E$ nötig. Sie ist gleich dem Selbstpotential der Belegung. Für die Kugelfläche erhält man $\frac{E}{2r} E = \frac{E^2}{2r}$.) Ist die Energie erschöpft, so hört das Verschieben auf. Von der Energie kommt die eine Hälfte auf die Verschiebung der positiven, die andere auf die der negativen Elektrizität. Die Angelegenheit der longitudinalen Spannungen wäre dadurch erledigt.

Was die seitlichen Abstofsungskräfte nach den benachbarten Kraftlinien hin anbetrifft, die sich z. B. cylindrisch um jede derselben angeordnet vorfinden, so müssen auch diese durch Gegenkräfte aufgehoben werden, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es fragt sich, worin diese Gegenkräfte ihren Ursprung haben. In Fig. 102 seien die Leiter zwei Kugeln. Drei der Kraftlinien sind angedeutet. Angenommen, die äufseren würden verkürzt, so würden sie nach innen rücken, wie es die Pfeile andeuten. Aus dem der Polarisation entspringenden Verkürzungsbestreben folgt also ein Teil des Drucks der äufseren Kraftröhren gegen die inneren. Dazu kommt noch die abstofsende Wirkung der nach aufsen folgenden Kraftlinien. Da bald Gleichgewicht eintritt, müssen die so entstandenen äufseren Kräfte den inneren Abstofsungskräften das Gleichgewicht halten. Ist das Mittel ein isotropes, so werden die Abstände der + von den benachbarten + ebenso grofs sein, wie die der + von den benachbarten —, es steht also zu vermuten, dafs die abstofsenden seitlichen Kräfte ebenso grofs sind, wie die anziehenden longitudinalen. Ein strenger Elementarbeweis für diese Behauptung Faradays ist mir nicht bekannt. Hier kann er entbehrt werden.

Fig. 102.



Wird der Gleichgewichtszustand irgendwie, z. B. durch Annäherung eines geladenen Konduktors, gestört, so nehmen die Kraftlinien andere Gestalt an. Entfernt man die störende Ladung wieder, so stellen die besprochenen Anziehungs- und Abstofsungskräfte den ursprünglichen Zustand wieder her. Die Kraftlinien verhalten sich wie elastische Fäden, für die sich eine besondere Kinematik ausbauen läfst.

Faraday nannte den Zustand des polarisierten Dielektrikums einen Zwangszustand, weil dieser aufhört, sobald die Ladung des

Leiters AB entfernt oder durch eine gleich grofse entgegengesetzte Ladung neutralisiert wird. Die longitudinalen Gegenspannungen ziehen dann die Elektrizitäten in die alte Lage zurück. Die den Elektrizitäten durch die Verschiebung verliehene potentielle Energie wird jetzt frei und setzt sich z. B. in Wärme um.

Maxwell verglich die elektrische Verschiebung mit einer wirklichen elektrischen Strömung für eine geringe Strecke. Um in das Verständnis seiner Anschauungen einzudringen, verzichte man für den Augenblick auf die molekulare Einteilung der Kraftröhre und fasse das Dielektrikum als kontinuierlich auf. Ihm ist also das Dielektrikum eine Art von Leiter, in dem sich eine Strömung vollziehen kann, jedoch erreicht die Verschiebung bei dem wachsenden Widerstande bald ihre Grenze, dann nämlich, sobald die dem Leiter mit der Ladung gegebene potentielle Energie aufgezehrt ist. Da durch die longitudinalen Spannungen die anziehenden und abstofsenden Kräfte der Ladung genau ersetzt werden sollen, so ist die Gröfse der Spannung und damit die des Widerstandes und auch die der abstofsenden Kräfte bekannt, nämlich für die Einheit der Elektrizität gleich $\frac{V_1 - V_2}{w}$, wo w ein kleiner Verschiebungsweg, $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz an seinen Endpunkten ist. Dieser Ausdruck gilt aber nur für die Luft als Dielektrikum. Für jedes andere handelt es sich um

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w}.$$

Die für die Einheit zu leistende Verschiebungsarbeit aber ist

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w} \cdot w = \frac{V_1 - V_2}{D}.$$

Nach Analogie der elektrischen Strömung geht nun, wie Maxwell annimmt, durch jeden Querschnitt der Kraftröhre eine elektrische Einheit, sobald eine solche durch einen der Querschnitte geht. Die benachbarte Einheit erfordert z. B. die Arbeit $\frac{V_2 - V_3}{D}$. Beide Einheiten zusammen erfordern also die Arbeit

$$\frac{V_1 - V_2}{D} + \frac{V_2 - V_3}{D} = \frac{V_1 - V_3}{D},$$

d. h. soviel, als ob die eine Einheit um beide Wege verschoben wäre. Ist demnach das Potential des Leiters AB an der Berührungsstelle gleich V_A, das des Leiters CD an der Berührungsstelle gleich V_B, so ist die Arbeit für die Verschiebung je einer Einheit durch jede Niveaufläche im ganzen gleich $\frac{V_A - V_B}{D}$, d. h. ebenso grofs, als ob die erste der betrachteten Einheiten den ganzen Weg passiert hätte.

Erstreckt sich aber das Dielektrikum bis ins Unendliche, so ist dort V_B gleich Null. Geht also jetzt ebenfalls bei der Verschiebung durch jeden Querschnitt die elektrische Menge 1, so ist die Verschiebungsarbeit gleich $\frac{V_A}{D}$. Die Verschiebungen sind dabei von verschiedener Gröfse. Sie sind umgekehrt proportional den Abständen von Niveaufläche zu Niveaufläche, gehorchen also dem Gesetze $pw = p_1 w_1$, oder $p : p_1 = w_1 : w$, ebenso dem Gesetze $pF = p_1 F_1$, denn durch jeden Querschnitt soll gleich viel fliefsen. Die Arbeit für die positive elektrische Einheit ist von der berechneten Gröfse, ebenso grofs ist sie für die negative, beide zusammen erfordern die Arbeit $2\frac{V_A}{D}$. Die hydrodynamischen Analogien bleiben erhalten.

Handelt es sich z. B. um eine geladene Kugel im unbegrenzten Dielektrum, so ist die Arbeit für beide Einheitsverschiebungen gleich $\frac{2}{D}\frac{E}{r}$. Fliefst aber in der Kraftröhre, die an der Kugel den Querschnitt 1 hat, nach jeder Richtung die Menge $\frac{\varepsilon_1}{2}$, so ist die Arbeit für beides gleich $\frac{2}{D}\frac{E}{r}\frac{\varepsilon_1}{2}$. Durch die ganze Kugelfläche fliefst dann das $4r^2\pi$fache von ε, die Arbeit ist also gleich

$$\frac{2}{D}\frac{E}{r}4r^2\pi\frac{\varepsilon}{2} = \frac{4r^2\pi E\varepsilon}{Dr}.$$

Diese mufs gleich der potentiellen Energie der Ladung sein, d. h. gleich $\frac{VE}{2D}$ oder $\frac{E^2}{2Dr}$ sein, d. h. es mufs sein $8r^2\pi\varepsilon = E$, d. h. die im Dielektrikum nach beiden Richtungen verschobene Elektrizitätsmenge ist ebenso grofs, wie die Ladung E.

Dasselbe gilt von der Ladung beliebig gestalteter Konduktoren.

So war Maxwell berechtigt, die Gröfse der elektrischen Verschiebung gleich der der Ladung E zu setzen. So lag es zugleich nahe, nur von einer elektrischen Verschiebung E durch jede Niveaufläche zu sprechen, statt von einer Ladung E des Leiters. Das Hervorbringen einer elektrischen Verschiebung E im Dielektrikum ersetzt den Begriff der Ladung, erst der neue Zustand des Dielektrikums influenziert beide Leiter bis zur Ladung $\pm E$. Dadurch kam vollständige Symmetrie der Auffassung bezüglich der beiden Leiter zustande, die Hauptaktion aber wurde ganz in das Dielektrikum verlegt.

Was Faraday in unbestimmter Weise als Kraftflufs bezeichnet hatte, wurde so durch Maxwell als elektrische Verschiebung mit mathematischer Schärfe formuliert, die Theorie der Fernwirkung aber dabei ganz entbehrlich gemacht. An Stelle des früher behandelten Begriffs der Spannung innerhalb einer Zelle, deren Wände für jede Flächeneinheit mit der Masse 1 belegt waren, trat so die elektrische Verschiebung. War die Spannung nach Laplace gleich Null, so ist hier die Änderung des Zelleninhalts durch den Kraftzuflufs und -abflufs Faradays, durch den Elektrizitätsaus- und -eintritt Maxwells, gleich Null. War die Spannung nach Poisson $4\pi E$, so ist hier die Vermehrung des elektrischen Inhalts der Zelle gleich $4\pi E$.

Die longitudinalen und lateralen Gegenspannungen im Dielektrikum sind, wie schon in Nr. 59 angedeutet wurde, ganz analog den elastischen Gegenspannungen innerhalb eines auf Zug beanspruchten Stabes. Dort nimmt an jeder Stelle die Gröfse der Gegenspannung zu mit der Verschiebung λ, die ihrerseits proportional der Beanspruchung S ist, d. h. man hat $\lambda : \lambda_1 = S : S_1$. Dem entspricht hier die Zunahme der elektrischen Verschiebung mit der Ladung E. Die Verschiebungsarbeit ist in beiden Fällen proportional dem Quadrate von S bezw. E. Ist die Stablänge gleich 1, so ergiebt sich der Elastizitätsmodul $\mathfrak{E}$ aus der Proportion $\lambda : 1 = S : \mathfrak{E}$, d. h. er ist

$$\mathfrak{E} = \frac{S}{\lambda} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Verlängerung}}.$$

Ebenso bezeichnet Maxwell den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \frac{V_1 - V_2}{E} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{elektrische Verschiebung}}$$

als den elektrischen Elastizitätskoeffizienten des Dielektrikums. Die Proportionen der Elastizitätslehre gelten nur innerhalb der sogenannten Elastizitätsgrenze. Wird der sogenannte Tragmodul überschritten, so wird das innere Gefüge des Materials durch bleibende Deformationen verdorben, bei weiterer Beanspruchung erlahmt die Widerstandsfähigkeit und die Überlastung führt zum Bruch. Ähnliches geschieht hier beim Übertreiben der Ladung E des Leiters bezw. beim Übertreiben der elektrischen Verschiebung. Wird eine gewisse Grenze überschritten, so erlahmt der Widerstand des Dielektrikums und es erfolgt ein gewaltsames Überströmen der Elektrizitäten in Form eines elektrischen Funkens.

Mit jeder Verlängerung eines Stabes ist eine seitliche Kontraktion desselben verbunden, die der Verlängerung proportional ist. Der Elastizitätsmodul gegen Druck ist derselbe, wie gegen Zug. [Die Tragmoduln können, wie beim Schmiedeisen, für Druck und Zug dieselben, oder, wie beim Gufseisen, für Zug und Druck verschieden sein.] Die Vereinigung von lateraler Kontraktion und longitudinaler

Ausdehnung entspricht den beiden Arten von Gegenspannungen im Dielektrikum.

Ebenso wenig wie es unüberwindliche Festigkeit und vollkommene Elastizität giebt, ebenso wenig giebt es ein vollkommen isolierendes Dielektrikum. Im Laufe der Zeit tritt bei jeder Ladung eine allmähliche Entladung ein, bei jeder elektrischen Verschiebung also ein allmähliches Zurückziehen der Teilchen in die alte Lage, wobei sich die frei werdende potentielle Energie in Wärme umsetzen kann. Der Spannungszustand also erlahmt allmählich und die Gegenspannungen siegen über die Beanspruchung. Die ältere Auffassung erklärt dies durch ein allmähliches Eindringen der Influenz in das Dielektrikum, wodurch eine schrittweise Neutralisierung eingeleitet wird. Andere Analogien werden in den physikalischen Lehrbüchern besprochen.

Zur Würdigung der Maxwellschen Auffassung ist folgendes zu sagen. Zunächst handelt es sich nur um eine neue Ausdrucksweise, um eine andere Sprache für die Deutung der Erscheinungen. Maxwell selbst hat zugegeben, das eigentliche Wesen des Spannungszustandes habe er nicht ergründet, dieser zweite Schritt sei ihm nicht gelungen. Er hat aber im Anschlufs an Faraday den Vorgang in das Dielektrikum verlegt, während die ältere Theorie nur von Fernwirkungen sprach, die vom Leiter ausgingen und manches unerklärt liefsen. Insbesondere kannte die ältere Theorie nichts von einem Zwangszustande des im luftleeren Raume befindlichen Äthers, bei dem es sich ebenfalls um Energieaufspeicherung durch elektrische Verschiebung handelt. Maxwell hat gerade dem Zwangszustande des Äthers besondere Arbeiten gewidmet. Bedeutungsvoll konnte aber seine Auffassung erst in dem Augenblicke werden, der uns über die Frage der Geschwindigkeit aufklärte, mit der die elektrischen Wirkungen sich verbreiten, denn diese konnte bei den Fernwirkungen als unendlich grofs angesehen werden. Diese Frage ist erst durch die Hertzschen Versuche endgültig entschieden worden und zwar dahin, dafs die Geschwindigkeit, mit der die elektrischen Wellen im luftleeren Raume vorwärtsschreiten, etwa die des Lichtes ist, wie es Faraday geahnt und Maxwell mit Bestimmtheit vorausgesagt hatte. Diese Wellen sind häufig der Reflexion, der Brechung, der Interferenz und Polarisation unterworfen, und nach Helmholtz sind sie wahrscheinlich als Transversalwellen aufzufassen. Zwischen den Wellenlängen der strahlenden Wärme und des Schalles bestand bisher eine grofse Kluft. Diese ist durch das Einschalten der elektrischen Wellen überbrückt worden. Ein weiterer Erfolg lag in der jetzt beginnenden Anerkennung der von Maxwell aufgebauten elektromagnetischen Lichttheorie.

Nach alledem scheint es, als ob die Maxwellsche Auffassung vor der früheren den Vorzug verdiente. Sie erweckt die Hoffnung, daſs wir einer einheitlichen Theorie der physikalischen Erscheinungen entgegengehen. Die Frage kann nur sein, ob man die Theorie der Fernwirkungen beibehalten und sie mit gewissen unentbehrlichen Maxwellschen Anschauungen verquicken will, oder ob man einheitlich nach Maxwell arbeiten soll. Zwar erheben sich noch Stimmen gegen das letztere, aber der Sieg Maxwells scheint bereits gesichert zu sein.

Da die Theorie der Schwingungen an dieser Stelle der elementaren Behandlung noch nicht zugänglich erscheint, soll hier mit den entsprechenden Betrachtungen abgebrochen werden. Für Kenner der höheren Analysis sei neben Maxwells Originalarbeiten und Maxwell-Weinstein folgende Litteratur angegeben:

Föppl: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig bei B. G. Teubner.

Föppl: Die Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig bei B. G. Teubner.

Maxwell-Boltzmann: Über Faradays Kraftlinien, Ostwaldsche Klassikerausgabe.

Helmholtz: Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Hamburg-Leipzig bei Voss.

Helmholtz: Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I. Leipzig bei Barth.

Dagegen hält an der Theorie der Fernwirkungen besonders fest und stellt sich den neueren Anschauungen kritisch gegenüber

Dr. C. Neumann: Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Wirkungen. Leipzig bei Teubner. Auf seine Einleitung und die Einwände gegen Hertz auf S. 247 bis 251 sei besonders aufmerksam gemacht.

Die Hertzschen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft sind im Jahre 1892 bei Ambr. Barth (Leipzig) erschienen. Nach Hertz ist das Wesen der Elektrizität weder durch Maxwell noch durch die Schwingungen ergründet. Hertz betrachtet seine Theorie lediglich als einen Weg, auf die Maxwellschen Gleichungen zu gelangen. Das Obige kann selbstverständlich nur als eine vorläufige Einführung in die neueren Anschauungen betrachtet werden.

Noch könnte die Frage aufgeworfen werden, ob sich zwei benachbarte Kraftlinien nicht auch gegenseitig anziehen können. Die Vorzeichenvertauschung in der einen der in Fig. 101 gezeichneten Kraftlinien reicht hin, die Frage zu beantworten. Da jetzt entgegengesetzte Elektrizitäten nebeneinander liegen, findet Anziehung statt. In einem späteren Kapitel wird sich zeigen, daſs die Kraftlinien paralleler Magnetstäbe abstofsend aufeinander einwirken, wenn gleichnamige Pole nebeneinander liegen, dafs aber Anziehung der Linien stattfindet, wenn man die Pole des einen vertauscht. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Benachbarte Kraftlinien stofsen einander ab, wenn sie gleich gerichtet sind. Diese Ausdrucksweise ist aber nur eine sinnbildliche, denn sie bezieht sich auf die polarisierten Moleküle.

Erinnert man sich ferner, dafs, je mehr sich die Kraftlinien und Niveauflächen aneinander drängen, um so gröfser die Stärke der elektrischen Kraftwirkungen ist, so erkennt man, dafs beide Sätze zusammen die bequemste Ausdrucksweise zum Beschreiben der Probleme geben, dafs man aus den Figuren ohne weiteres ablesen kann, was man wissen will. Es ist zu empfehlen, die schon besprochenen Systeme von Kraftlinien und Niveaulinien von diesem Gesichtspunkte aus noch einmal zu betrachten und mit jeder kommenden Figur ein gleiches zu thun. Man kann sich die Kraftlinien als vollkommen elastische Drahtfäden vorstellen, die bei jeder Störung des im Dielektrikum bestehenden Gleichgewichtes auf das empfindlichste den Zug- und Druckbeanspruchungen nachgeben, sich biegen oder strecken, sich drehen und sich dabei in charakteristischer Weise deformieren, so dafs sich eine förmliche Kinematik der Kraftlinien aufbauen liefse. Auch bei den Hertzschen Wellen, die auf Seite 156 und 157 seiner „Untersuchungen" gezeichnet sind, handelt es sich um Kinematik der Kraftlinien, die sich so als wesentlicher Bestandteil der neueren Anschauungen herausstellt.

An einigen drei- und zweidimensionalen Problemen soll dies erläutert werden. Wirft man einen Stein ins Wasser, so quellen die bekannten Wellenkreise aus der Wurfstelle hervor. Dasselbe geschieht bei kontinuierlich zunehmender positiver Ladung eines allein im Raume befindlichen Konduktors mit den entsprechenden Niveauflächen. Neue und neue Niveauflächen quellen hervor und wandern, den Gesetzen des Zellennetzes folgend, koncentrisch anschwellend dem unendlichen Bereiche zu. Nur findet der Unterschied statt, dafs auch die Abstände zwischen den Niveaulinien anschwellen. Wird ein cylindrischer Draht geladen, so handelt es sich um cylindrische Flächen, die sich nach dem Gesetz der quadratischen Einteilung des Normalschnitts durch Polarkoordinaten anordnen.

Da eine geladene Kugel sich im Laufe der Zeit entladet, so findet auch die entgegengesetzte Erscheinung, das allmähliche Zusammenziehen der Niveaulinien statt. Bei dem Vertauschungsproblem des letzteren Falles finden Erscheinungen statt, die sich der Leser selbst zurechtlegen möge. Dabei ist jedoch einige Vorsicht nötig.

Werden zwei Kugeln in übereinstimmender Weise allmählich geladen, so quellen zunächst koncentrische Kugelflächen hervor, die sich an den einander zugekehrten Stellen zuspitzen, als ob sie einander anzögen, schliefslich berühren sich die Spitzen, die beiden Ovale vereinigen sich zu einer zunächst eingebuchteten Fläche, schwellen weiter an und werden zu Kugeln. Hat die Kugel die Ladung E, und bringt man eine zweite Ladung E heran, so krümmen sich die geraden Kraftlinien nach der in Fig. 66 angegebenen Form und schränken sich auf eine Halbebene ein. Im Momente des Zusammenfallens beider Ladungen erhält man ein Strahlenbüschel von doppelter Sektorenzahl. Nähert man eine dritte Ladung E, so wird Fig. 72 mafsgebend, und schliefslich hat man ein Strahlenbüschel von dreifacher Mächtigkeit. Der Vorgang der Ladung erhält so eine vollständig klare mathematische Deutung. Das Entgegengesetzte geschieht bei allmählicher Entladung. Das Hervorquellen oder Einschrumpfen im Falle der Ladung oder Entladung paralleler geradliniger Drähte führt auf lemniskatische Cylinder als Niveauflächen. Das Verhalten der Lemniskaten im Normalschnitt entspricht ganz dem der lemniskatischen Farbenringe, die bei der Drehung einer Platte aus doppeltbrechendem Material im Polarisationsapparate beobachtet werden. Man vergleiche dazu das Kapitel über „Lemniskatische Kinematik“ in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“.

Handelt es sich um zwei parallele gleichgeladene Drähte, von denen der eine im Endlichen, der andere in sehr grofser Entfernung liegt, so zeigt der erstere im Normalschnitt zunächst koncentrische Kreise und Radien. Nähert man den zweiten, so spitzen sich die Kreise zu lemniskatischen Kurven zu, die Strahlen aber krümmen sich zu Hyperbeln um. Sie werden dabei auf die durch die Symmetrielinien des Problems begrenzte Halbebene eingeschränkt. Entfernt man den genäherten Draht wieder, so strecken sich die Hyperbeln wieder in die geradlinige Form, die lemniskatischen Ovale aber werden wieder zu Kreisen.

Sind die Drähte entgegengesetzt geladen, so findet ganz anderes statt. Bei Annäherung des zweiten werden die koncentrischen Kreise des Normalschnitts gewissermafsen abgestofsen und auf die besprochene Halbebene eingeschränkt. Sie bilden eine Steinersche Kreisschar. Die Strahlen aber krümmen sich einander entgegen, als ob sie sich anzögen, und je zwei bilden einen Kreisbogen, sämtliche ein Kreisbüschel.

Gerade an diesen zweidimensionalen Problemen mit ihren auch dem Anfänger geläufigeren Kurven läfst sich diese Art von Kinematik sehr einfach erläutern, besser als an den dreidimensionalen Problemen.

Sämtliche Kurvenscharen, die in der „Einführung“ gezeichnet sind, lassen sich in solcher Weise behandeln und bieten Beispiele auch für die kompliziertesten Fälle der Punkt- und Linienprobleme. Dafs alles auch elektromagnetisch gedeutet werden kann, soll später gezeigt werden.

So giebt der Satz, dafs benachbarte und gleich gerichtete Kraftlinien einander abstofsen und entgegengesetzt gerichtete einander anziehen, nicht nur eine unbestimmte Vorstellung, sondern alles läfst eine streng mathematische Formulierung und bestimmte geometrische Darstellung zu. Die Kraftlinien und Niveauflächen sind nicht etwas Starres, wie die Gebilde der Euklidischen Geometrie, sondern etwas leicht Bewegliches, in unaufhörlicher Umgestaltung Begriffenes, wie die „lebendigen“ Gebilde der synthetischen Geometrie. Die unbestimmten Vorstellungen Faradays sind so in ein klares Licht gestellt, und man erkennt, dafs auch die Maxwellschen Vorstellungen und seine mathematischen Formulierungen einer elementaren Behandlung fähig sind. Dafs allerdings der Kenner der höheren Analysis, wie auch die „Einführung“ zeigt, noch weiter vordringen kann, ist selbstverständlich.