Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel VII. Die Methode der eletrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel VII.

Die Methode der elektrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume.*)

130) Vorbemerkungen. In diesem Kapitel kommen einige Theorien zur Anwendung, die in den neueren Lehrbüchern der Geometrie (vergl. z. B. Methodisches Lehrbuch, II) behandelt werden, die harmonischen Punkte, Pol und Polare, Inversion oder Abbildung durch reciproke Radiivectores, die Lehre von den Steinerschen Kreisscharen (elliptische und hyperbolische), die Kreisverwandtschaft von Möbius und dessen Kugelverwandtschaft.

Der Gedanke der Inversion geht bis auf Apollonius von Perga zurück, dessen Kreisberührungen (Taktionsprobleme) später von Vieta, Newton, Euler und Fuſs behandelt und von Fermat auf Kugeln ausgedehnt wurden. Nachdem sich auch Gaultier, Poncelet, Monge und Steiner damit beschäftigt hatten, stellte Plücker im Jahre 1834 die Inversion als ein neues Übertragungsprinzip auf, mit dem sich dann auch Magnus befaſste. Plücker gebührt die Priorität vor W. Thomson, der in England als Schöpfer dieses Gebietes betrachtet wird, obwohl sein „Prinzip der elektrischen Bilder“ erst 1845 veröffentlicht und im Cambridge and Dublin Mathematical Journal von 1848 ausführlicher dargestellt wurde. Dies geschah im Anschluſs an Poisson, der mit Hilfe der Kugelfunktionen, d. h mit Hilfe höherer Rechnungen, die Resultate bereits gefunden hatte, zu denen Thomson den elementaren Weg fand. Liouville setzte 1847 die Thomsonschen Forschungen fort, Lamé drang weiter vor in den Leçons sur les coordonnées curvilignes, Kirchhoff benutzte die Bicircularkoordinaten zur Anbahnung der Lehre von den stationären Strömungen in ebenen Platten. Reye stellte die Kugelverwandtschaft

*) Dieses Kapitel kann überschlagen werden, wenn dem Leser die Gesetze der Inversion nicht bekannt sind. Das zur Erläuterung nötigste ist jedoch in den Text aufgenommen.

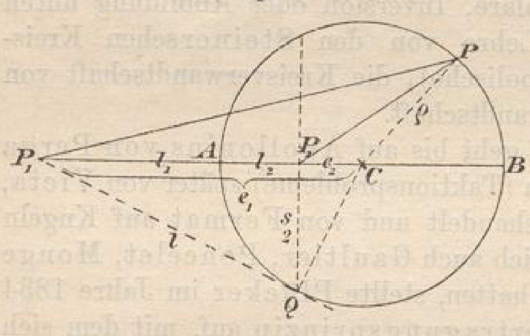
in einer Monographie dar. Auch Townsend, Hart, Casey haben sich mit diesen Lehren beschäftigt.

Es handelt sich, kurz gesagt, darum, mit Hilfe einer Transformation aus bereits gelösten Beispielen zur Geometrie und mathematischen Physik neue abzuleiten, also einen einfachen Übertragungsmechanismus an Stelle der umfangreichen Rechnungen zu setzen, über deren Schwierigkeiten man sich nach Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, unterrichten möge.

Um den Gang der Untersuchungen nicht durch mathematische Darlegungen unterbrechen zu müssen, geben wir für diejenigen Leser, denen die neueren Theorien nicht bekannt sind, einige geometrische Vorbemerkungen, verweisen aber im übrigen auf die neueren Lehrbücher (z. B. Method. Lehrbuch II).

131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel. Zu jedem Punkte P_1 aufserhalb eines Kreises giebt es auf dem zugehörigen Durchmesser einen zweiten Punkt P_2, der so liegt, dafs P_1, P_2 und die Endpunkte A und B des Durchmessers harmonische Punkte sind. Für diese gilt also, von den Vorzeichen abgesehen, die Proportion

Fig. 103.



$$P_1A : P_2A = P_1B : P_2B,$$

oder, wenn ϱ der Radius des Kreises ist und $l_1 = P_1A$, $l_2 = P_2A$, $e_1 = P_1C$, $e_2 = P_2C$ gesetzt wird

1) $$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : (e_2 + \varrho).$$

Nach Pythagoras ist ferner $CQ^2 = CP_2 \cdot CP$ (Kathetenquadrat gleich dem Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Stück derselben), also

2) $$e_1 \cdot e_2 = \varrho^2,$$

was die Inversionsbeziehungen

$$e_1 = \frac{\varrho^2}{e_2} \quad \text{und} \quad e_1 = \frac{\varrho^2}{e_1}$$

giebt, die für $\varrho = 1$ in

$$e_1 = \frac{1}{e_2} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{1}{e_1}$$

übergehen, wobei die Reciprozität am reinsten hervortritt.

Durch die Beziehung 2) geht die Proportion 1) über in

$$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : \left(\frac{\varrho^2}{e_1} + \varrho\right) = (e_1 + \varrho) : \frac{\varrho}{e_1}(\varrho + e_1) = 1 : \frac{\varrho}{e_1} = e_1 : \varrho = \varrho : e_2,$$

also

3) $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2}.$$

Verbindet man ferner einen Punkt P des Kreisumfangs mit P_1 und P_2, so ist das Verhältnis der Radiivectores p_1 und p_2 eine konstante Gröfse $\varkappa$, denn PA halbiert den Dreieckswinkel P_1PP_2. Es ist also

4) $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2} = \varkappa.$$

Aus $e_1 = \varkappa\varrho$ und $e_2 = \frac{\varrho}{\varkappa}$ folgt noch durch Division $\frac{e_1}{e_2} = \varkappa^2$, so dafs man hat

5) $$\frac{e_1}{e_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{e_1^2}{\varrho^2} = \frac{\varrho^2}{e_2^2} = \varkappa^2.$$

P_2 wird gefunden mit Hilfe der von P_1 aus gezogenen Tangente $P_1Q = t$ und des Lotes QP_2. Umgekehrt ergiebt sich aus P_2 mit Hilfe des Lotes P_2Q und der Tangente in Q der Punkt P_1. Dabei ist nach dem bekannten Sekantensatze

$$t^2 = P_1A \cdot P_1B = PC^2 - CQ^2 = e_1^2 - \varrho^2.$$

Setzt man das Lot $P_2Q = \frac{s}{2}$ (halbe kürzeste Sehne durch P_2), so ist nach dem Satze über die Abschnitte der Sehnen unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$-\left(\frac{s}{2}\right)^2 = P_2A \cdot P_2B = \overline{P_2C}^2 - \overline{CQ}^2 = e_2^2 - \varrho^2.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $(e^2 - \varrho^2)$ für Punkte innerhalb und aufserhalb des Kreises (also für den negativen und positiven Fall gemeinsam) als Potenz Π eines Punktes in Bezug auf den Kreis, so braucht man für den Ausdruck

$$\Pi = P_1A \cdot P_1B = t^2 \quad \text{bezw.} \quad \Pi = P_2A \cdot P_2B = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

in der Schreibweise keinen Unterschied mehr zu machen.

132) Anwendung auf das Zweipunktproblem. Man denke sich jetzt im Punkte P des Kreisumfangs eine dem Newtonschen Gesetze entsprechende Kraft $\frac{1}{p_1^2}$ in der Richtung nach P_1 hin wirkend.

Zerlegt man sie in einen horizontalen Teil h_1 und einen nach C hin gerichteten Teil q_1, so ergiebt sich mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

$$h_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{e_1}{p_1} = \frac{e_1}{p_1^3}, \qquad q_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho}{p_1^3}.$$

Macht man dasselbe mit einer in P wirkenden Kraft $\frac{1}{p_2^2}$, die aber in der Richtung P_2P, also abstofsend im Sinne des Newton-Coulombschen Gesetzes wirkt, so wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$h_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{e_2}{p_2} = \frac{e_2}{p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1 p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1} \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3}; \; q_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho}{p_2^3} = \varrho \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3}.$$

Sollen, damit die Resultante durch C gehe und der Kreis Niveaulinie werde, die Horizontalteile einander aufheben, so müssen die Kräfte $\frac{1}{p_1^2}$ und $\frac{1}{p_2^2}$ in bestimmtem Verhältnisse stehen. Setzt man z. B. die eine wieder gleich $\frac{1}{p_1^2}$, die andere aber gleich $\frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{1}{p_2^2}$, dann wird der eine Horizontalteil

$$h_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{e_1}{p_1^3},$$

also, da die Richtung entgegengesetzt ist, gleich $-h_1$. Dabei wird

$$q_1 = \frac{\varrho}{p_1^3} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3},$$

also unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$q_1 + q_2 = \frac{\varrho}{p_1^3} - \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{\varrho^2 - e_1^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}.$$

Nun ist aber

$$-\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\frac{\varrho^4}{e_2^2} - \varrho^2}{\varrho \cdot \frac{p_2^3 \varrho^3}{e_2^3}} = -\frac{\varrho^2}{e_2^2}\left(\varrho^2 - e_2^2\right) \cdot \frac{e_2^3}{p_2^3 \varrho^4} = -\frac{\varrho^2 - e_2^2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2} = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Also auch

$$q_1 + q_2 = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Sind P_1 und P_2, also auch Π_1 und Π_2 und aufserdem ϱ fest gegeben, so ist p_1 bezw. p_2 die einzige veränderliche Gröfse, die der Lage von P auf dem Kreise entspricht. Die Resultante $q_1 + q_2$

ist also unter den gegebenen Voraussetzungen umgekehrt proportional der dritten Potenz von p_1 bezw. p_2.

In elektrostatischer Hinsicht hat man also folgendes:

Läfst man in einem Punkte P_1 aufserhalb des gegebenen Kreises die elektrische Ladung $+1$, in dem zugeordneten harmonischen Punkte P_2 die Ladung $-\frac{\varrho}{e_1}$ wirken, so geht die Resultante für jeden Kreispunkt durch den Punkt C, d. h. der Kreis ist eine Niveaulinie des Potentials. Ladet man den auf dem Kreisumfange beliebig liegenden und dort beweglichen Punkt P mit der Elektrizität $+1$ oder -1, so wird für jede Lage die Resultante gleich

$$\mp \frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = \mp \frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}$$

oder, was dasselbe ist, gleich

$$\pm \frac{e_2 - \varrho^2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2} = \pm \frac{e_2 \Pi_2}{\varrho^2 p_2^3},$$

d. h. umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung p_1 bezw. p_2. Bei Ladung E bezw. $-E\frac{\varrho}{e_1}$ ist die Resultante das E-fache.

Dadurch bestätigen sich die Resultate des Abschnitts 97, von denen man ohne weiteres hätte ausgehen können, zugleich aber ist die dritte Potenz der Entfernungen als mafsgebend nachgewiesen, die schon bei dem Störungsproblem unter Nr. 35 als wichtig hingestellt worden war.

Man denke sich nun den Kreis um AB rotierend, ebenso die in Nr. 97 behandelten Kraft- und Niveaulinien des Zweipunktproblems für ungleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten, die sich wie $e_1 : \varrho$ verhalten. Die Niveauflächen des Problems haben dann die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{\varrho}{r_2} = c,$$

eine davon hat die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{\varrho}{r_2} = 0,$$

woraus $\frac{r_1}{r_2} = \frac{e_1}{\varrho}$ folgt, so dafs es sich um die soeben besprochene Kugel handelt. Denkt man sich die gleichwertigen Kraftröhren konstruiert, die nach Nr. 97 von P_1 aus zum Teil nach P_2, zum Teil nach dem unendlichen Bereiche gehen, so wird die Kugelfläche in gleichwertige Felder eingeteilt, so dafs für sämtliche $p \cdot F$ konstant ist, wenn p die Resultante der beiden Kräfte, F die Fläche eines kleinen Feldes bedeutet. Die Kraftresultanten also verhalten sich umgekehrt, wie die Felderflächen, sie verhalten sich aber nach obigem auch umgekehrt, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 und P_2, folglich hat man den Satz:

Die gleichnamigen Kraftröhren des Zweipunktproblems teilen die dabei vorkommende Kugelfläche in Felder ein, deren Flächen sich verhalten, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 oder P_2.

Angenommen nun, auf der Kugelfläche ordnete sich aus irgend welchen Gründen Influenzelektrizität denselben Resultanten entsprechend an, so würde dies nach Poisson mit der Dichtigkeit $\delta = \frac{p}{4\pi}$ geschehen, d. h. proportional den Kraftresultanten, und daher umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Fntfernungen von P_1 und P_2 und umgekehrt proportional diesen Felderflächen.

Diese Voraussetzung trifft nun ein bei folgenden Influenzproblemen:

133) **Aufgabe.** Eine leitende Kugel stehe durch einen Draht mit der Erde in Verbindung, in der Entfernung e vom Mittelpunkte befinde sich im Aufsenraume ein Punkt mit der elektrischen Ladung $+E$. Wie grofs ist die Menge der Influenzelektrizität erster Art, und wie ordnet sie sich an?

Auflösung. Durch die Verbindung mit der Erde wird erreicht, dafs nach vollendeter Scheidung im ganzen Leiter ebenso, wie in der Erde, das Potential Null herrscht. Die gesamte Influenzelektrizität $-E_1$ erster Art hat sich infolge der gegenseitigen Abstofsungen ihrer Teilchen auf der Kugeloberfläche angeordnet, aber infolge der Anziehung durch die Ladung E unregelmäfsig, d. h. dichter auf der dem Punkte E zugekehrten, weniger dicht auf der ihm abgewendeten Seite. Die Sätze über die homogene Kugelschale finden also hier keine Anwendung, das Potential der Belegung allein ist also für den Innenraum nicht konstant. Es wird sich aber ein einfaches Gesetz ergeben.

Jedes elektrische Teilchen $-\varepsilon$ der Influenzelektrizität hat für den Mittelpunkt C der Kugel das Potential $\frac{-\varepsilon}{\varrho}$, die gesamte Influenzelektrizität hat also dort den Potentialwert

$$\sum \frac{-\varepsilon}{\varrho} = \frac{-E_1}{\varrho}.$$

Der Potentialwert der Ladung E des influenzierenden Punktes ist dort gleich $\frac{+E}{e}$, die Summe beider Potentiale ist nach obigem gleich Null, also mufs sein

$$\frac{E}{e_1} - \frac{E_1}{\varrho} = 0,$$

woraus folgt

$$E_1 = E\frac{\varrho}{e_1}.$$

Folglich:

Die Menge der Influenzelektrizität erster Art verhält sich zur Ladung des influenzierenden Punktes wie der Kugelradius zur Entfernung des Punktes vom Kugelmittelpunkte; der konstante Potentialwert im ganzen Innern der Kugel ist dabei gleich Null. Die Menge der Influenzelektrizität entspricht genau der des Punktes P_2 im vorigen Problem.

[Es könnte eingewandt werden, dafs auch noch auf dem Draht Influenzelektrizität erster Art vorhanden sein könnte. Denkt man sich aber den Draht unendlich dünn im Verhältnis zu den Dimensionen der Schale, so würde die Menge dieser mit wachsender Entfernung schnell abnehmenden Elektrizität verschwindend klein sein gegen die der auf der Kugelfläche angeordneten, ihre Wirkung auf die elektrische Verteilung kann also vernachlässigt werden. Es ändert sich daher auch nichts, wenn man den Draht abschneidet und die Verbindung mit der Erde aufhebt.]

134) Identität dieses Influenzproblems mit dem Zweipunktproblem. Nach Aufhebung der Verbindung denke man sich jetzt das Innere der Kugel entfernt, so dafs nur eine dünne Schale bleibt, deren Potential gleich Null ist.

Nur im Aufsenraume befinden sich die Kraftlinien des Problems, denn im Innern ist das Potential konstant. Sie gehen von P_1 aus teils nach der Kugel, teils nach dem unendlichen Bereiche. Die Kugel aber ist eine Potentialfläche mit dem Potentialwerte Null, sie mufs also von den Kraftlinien senkrecht getroffen werden. Ganz dasselbe findet bei dem entsprechenden Zweipunktprobleme statt. In der That handelt es sich um dieses Problem, nur ist die Kugelfläche mit ihrer Belegung als Ersatz für den Punkt P_2 eingetreten und so der Innenteil der Kugel aus dem Problem ausgeschieden worden (vgl. Nr. 97). Die Kraftlinien und die Niveauflächen des Aufsenteils sind ungeändert geblieben. Die Belegung wirkt nach aufsen genau so, wie eine gleichstarke Ladung des Punktes P_2.

Folglich mufs die Anordnung der Influenzelektrizität dem oben besprochenen Dichtigkeitsgesetz entsprechen. Die Dichtigkeit ist in jedem Punkte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2; sie ist umgekehrt proportional den Felderflächen, so dafs auf jedes Feld derselbe Betrag kommt; sie ist direkt proportional den an der Oberfläche wirkenden Einheitsresultanten

$$-E\frac{e_1^2-\varrho^2}{\varrho p_1^3}=E_1\frac{\varrho^2-e_2^2}{\varrho p_2^3}.$$

Die Dichte ist an jeder Stelle

$$\delta=-E\frac{e_1^2-\varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3}$$

bezw.

$$\delta=E_1\frac{\varrho^2-e_2^2}{4\pi\varrho p_2^3}.$$

135) Folgerungen für die Gravitation. Daraus folgt für die Lehre vom Potential der Schwere folgendes:

Denkt man sich auf einer Kugelfläche ponderable Masse m so verteilt, dafs ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von einem äufseren Punkte P_1 und seinem zugeordneten Punkte P_2 (oder von einem inneren Punkte P_2 und seinem zugeordneten Punkte P_1) ist, so wirkt sie nach aufsen genau so, wie dieselbe Masse im inneren Punkte P_2, nach innen ebenso, wie die gröfsere Masse $m\frac{e_1}{\varrho}$ im äufseren Punkte P_1.

Das erstere ist bereits nachgewiesen, das letztere folgt daraus, dafs im ganzen Innern das Potential der Belegung und das der Ladung des Punktes P_1 sich gegenseitig aufheben (Potentialwert gleich Null). Folglich:

Die so auf der Kugelfläche verteilte Masse giebt nach aufsen hin geradlinige Kraftlinien, die von P_2 ausgehen, und sie giebt Niveauflächen, die Kugeln mit P_2 als Centrum sind. Nach innen sind die Kraftlinien Strahlen, die von P_1 ausgehen, und die Niveauflächen sind Kugeln mit P_1 als Centrum. Für die Zelleneinteilung sind die Massen m bezw. $m\frac{e_1}{\varrho}$ zu Grunde zu legen.

Dasselbe Resultat findet man, wenn man P_2 mit der Elektrizität

$$-E_1=-E\frac{\varrho}{e_1}$$

ladet und die Kugelschale mit der Erde in Berührung setzt, nur sammelt sich dann die Influenzelektrizität nicht auf der Aufsenseite der Schale, sondern auf der Innenseite an. Der Gang der Betrachtung ist derselbe. Das Potential nach aufsen wird gleich Null, so dafs die Wirkungen von E_2 und der Belegung einander aufheben. Für gröfsere Entfernungen ist die Anordnung gleichgültig (Schwerpunkt), da aber die Wirkung gleich Null ist, mufs es sich um gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten handeln. Dies stimmt mit der vorigen Betrachtung überein. Es handelt sich also gewissermafsen um den Innenteil des Zweipunktproblems.

136) Centrobarischer Charakter der Belegung. Haben nun die Kraftlinien irgend einer Masse Asymptoten, so gehen diese nach Nr. 95 durch den Schwerpunkt der Masse. Hier sind die geraden Linien ihre eigenen Asymptoten, folglich ist P_2 der Schwerpunkt der so verteilten Masse (vgl. Nr. 131). Daraus ergiebt sich für die Mechanik folgendes bemerkenswerte Resultat:

Ordnet man auf einer Kugelfläche Masse so an, dafs ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional zur Entfernung von einem inneren Punkte P_2 (oder seinem zugeordneten äufseren Punkte P_1) wird, so ist P_2 der Schwerpunkt der Masse. Attraktionscentrum und Schwerpunkt fallen also zusammen. Die Belegung ist centrobarisch.

Ein äufserer Punkt wird also so angezogen, dafs er frei fallend sich geradlinig nach P_2 hinbewegt. Wie in Nr. 11 bezw. 18 wird das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve, das Potentialdiagramm durch die gleichseitige Hyperbel dargestellt. Wird der Punkt nach irgend welcher Richtung hin geworfen, so tritt dieselbe Erscheinung ein, wie bei den Planetenbewegungen um die Sonne P_2, d. h. er bewegt sich auf einem Kegelschnitte, dessen einer Brennpunkt nach P_2 fällt.

Ein innerer Punkt verhält sich ebenso, nur ist für ihn P_1 der mafsgebende Anziehungspunkt.

Man kann sich nun unendlich viele Kugeln denken, die in Bezug auf P_1 und P_2 das Gesetz $\frac{p_1}{p_2} = c$ befolgen, so dafs man den ganzen Innenraum der ersten Kugel ausfüllt. Ist auf jeder Fläche die Massenbelegung proportional dem Werte $\frac{1}{p_2^3}$, so ist die Sache dieselbe. Nur mufs man jetzt, da die excentrischen Kugeln auf der P_1 zugewandten Seite dichter aneinander liegen, als auf der andern, den Fehler vermeiden, von der Dichte der Flächenbelegung auf die der räumlichen

Ausfüllung zu schliefsen. Unten wird sich zeigen, dafs die räumliche Dichtigkeit proportional der Gröfse $\frac{1}{p_2^5}$ wird.

137) Sonderfall der Ebene. Nähert man den influenzierenden Punkt P_1 einer unendlich grofsen leitenden (und abgeleiten) Kugelschale, d. h. einer unbegrenzten Ebene, so wird P_2 das wirkliche Spiegelbild von P_1, und die Menge der Influenzelektrizität wird gleich $E_1 = E\frac{\varrho}{e_1}$. Hier ist $\varrho = e_1 - l_1$, also

$$E_1 = E\frac{\varrho}{\varrho + l_1} = E\frac{1}{1 + \frac{l_1}{\varrho}},$$

also für

$$\varrho = \infty, \quad E_1 = E,$$

d. h. die beiden Mengen sind einander gleich. Dies war selbstverständlich, denn P_1 durfte auch als innerer Punkt der unendlich grofsen Kugel angesehen werden. Diese elektrische Menge ist so auf der Kugel zu verteilen, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2 wird. Diese Entfernung ist jetzt

$$p_1 = \sqrt{l_1^2 + z^2},$$

wo z die Entfernung von der Geraden P_1P_2 ist.

Um die Dichte zu berechnen, kann man den Normalteil der Kraft $\frac{E}{p_1^2}$ bilden, d. h.

$$\frac{E}{p_1^2} \cdot \cos\alpha = \frac{E\,l_1}{p_1^2\,p_1} = \frac{E l_1}{p_1^3}.$$

Dazu kommt die abstofsende Einwirkung der Influenzelektrizität auf ihre eigenen Teilchen, die so ist, als ob dieselbe elektrische Masse in P_2 angebracht wäre. Dies giebt einen gleichgerichteten Normalteil von derselben Gröfse, so dafs die Normalkraft gleich $\frac{2El_1}{p_1^3}$ ist, während die andern Teile einander aufheben, so dafs Gleichgewicht stattfindet. Die Dichtigkeit wird also jetzt

$$\delta = \frac{2El_1}{4\pi p_1^3} = \frac{El_1}{2\pi p_1^3} = \frac{El_1}{2\pi\left(l_1^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies hätte sich auch aus dem früheren Resultate

$$\delta = E \cdot \frac{e_1^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{(\varrho + l_1)^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{2\varrho l^1 + l_1^2}{4\pi\varrho p_1^3}$$

ableiten lassen, was für $\varrho = \infty$ sich auf dasselbe reduziert. Dadurch ist eine wesentliche Ergänzung zur Theorie des symmetrischen Zweipunktproblems für gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten gegeben, dessen einer Punkt sich durch die so belegte Ebene ersetzen läfst. Die Felder der Ebene sind dabei proportional den dritten Potenzen der Entfernung von P_1.

[Die Bestätigung der Richtigkeit des Resultates läfst sich auf folgendem Wege elementar erreichen. Man errichte auf der Ebene in jeder Entfernung $r = z$ von der Linie $P_1 P_2$ Lote von der Höhe

$$y = \frac{E l_1}{2\pi [l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

so dafs der Mantel des zugehörigen Cylinders mit $P_1 P_2$ als Achse das $2r\pi$fache wird, nämlich $E l_1 \frac{r}{[l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}}$. Um den Inhalt des so entstehenden Diagrammkörpers ohne höhere Rechnung zu finden, entwickelt man in

$$\left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{3}{2}} = l_1^3 \left[1 + \left(\frac{r}{l_1}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

die Klammer mit Hilfe des binomischen Satzes in einer Reihe. Die Glieder derselben sind mit r zu multiplizieren und dann der Schichtenformel zu unterwerfen (Summenformel). Fügt man in der entsprechenden Klammer $+1$ und -1 hinzu, und multipliziert man mit l_1^2, so ergiebt sich im wesentlichen $1 - \left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Das Endresultat giebt als Elektrizitätsmenge E, wie oben verlangt war.]

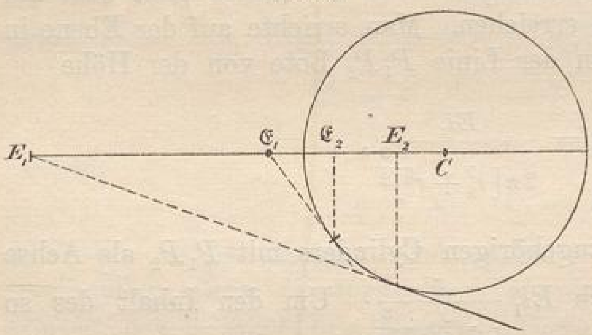
Bemerkenswert ist, dafs eine mit ponderabler Masse nach diesem Gesetz belegte Ebene auf beiden Seiten ebenso anziehend wirkt, wie der gleich stark geladene Punkt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene. Die Kraftlinien sind also Strahlen durch diesen Punkt, die Niveauflächen koncentrische Kreise. Von der Freifallbewegung gilt das oben Gesagte, ebenso von den in Kegelschnittbahnen erfolgenden Wurfbewegungen.

Symmetrie und Reciprozität werden so zu einem Hebel der mathematischen Physik. Zugleich erkennt man wiederum, dafs ein Anziehungsproblem vollständig bestimmt ist, sobald man zwei seiner Niveauflächen kennt, dafs z. B. bei Punktproblemen die Punkte durch Niveauflächen von bestimmter Belegung ersetzt werden können. (Vgl. Nr. 128.)

Zur Übung kann man Probleme mit mehreren influenzierenden Punkten, die sich elementar angreifen lassen, behandeln; z. B. das folgende:

138) **Aufgabe.** Zwei gleichartig geladene Punkte aufserhalb einer leitenden Kugel, die auf der Verlängerung eines Durchmessers liegen, wirken unter Ableitung der letzteren nach der Erde influenzierend. Menge und Anordnung der Elektrizität sind zu untersuchen.

Fig. 104.



E_1 und $\mathfrak{E}_1$ seien die geladenen Punkte und zugleich die Elektrizitätsmengen der Ladung, E_2 und $\mathfrak{E}_2$ seien die Inversionsbilder mit den Ladungen

$$E_2 = -E_1 \frac{\varrho}{e_1}, \quad \mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}_1 \frac{\varrho}{\mathfrak{e}_1}.$$

Das Problem dieser 4 Punkte ist nach Nr. 100 zu behandeln und giebt unter den Niveauflächen

$$1) \qquad \frac{E_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{r}_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{r}_2} = c$$

die gegebene Kugel, die dem Potentialwerte Null entspricht. Die Kraftlinien des Problems sind von der Gleichung

$$2) \qquad E_1 \cos \vartheta_1 + \mathfrak{E}_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \vartheta_2 + \mathfrak{E}_2 \cos \delta_2 = c.$$

Beide Scharen sind zugleich die des Hauptproblems.

Ist für irgend einen Punkt der Kugel p die durch C gehende Resultante, also

$$p = E_1 \frac{\Pi_1}{\varrho r_1^3} + \mathfrak{E}_1 \frac{\mathfrak{P}}{\varrho \mathfrak{r}_1^3},$$

so ist $\frac{p}{4\pi}$ die Dichte der Influenzelektrizität in jedem Punkte, ihre Menge ist $E_2 + \mathfrak{E}_2$. Die Flächen $p = c$ geben mit der Kugel Schnittlinien, auf denen die Dichte konstant ist.

In entsprechender Weise sind beliebig viele und beliebig liegende Konduktoren zu behandeln. Die Belegung allein, ponderabel gedacht, wirkt nach aufsen wie die Punkte E_2 und $\mathfrak{E}_2$, nach innen wie die Punkte E_1 und $\mathfrak{E}_1$ mit ihren Ladungen. Der Schwerpunkt von E_2 und $\mathfrak{E}_2$ ist der Schwerpunkt der Belegung.

139) Elektrische Bilder.

Thomson, dem man diese Theorie verdankt, hat durch die Inversion zu gegebenen Punkte zu findende Punkte mit ihren elektrischen Ladungen die elektrischen Bilder der ersteren und ihrer Ladungen genannt. Der Name ist um so treffender, als es sich für den Fall der Ebene um wirkliche Spiegelbilder handelt. Der Begriff des elektrischen Bildes umfafst also erstens die Lage, zweitens die Ladung. Auch eine homogene Masse hat ein elektrisches Bild in Bezug auf jede Kugel, die Abbildung aber wird nicht homogen, weil die einzelnen Punkte verschiedene Ladungen erhalten, die Dichtigkeit also veränderlich wird. Man mufs also lernen, nicht nur Punkte, Linien, Flächen und Körper, sondern auch Dichtigkeiten und Potentialwerte zu übertragen. Kann man dies, so lassen sich aus gelösten Problemen neue ableiten. Dies soll jetzt gelehrt werden.

140) Inversionsbeziehungen bei elektrischen Bildern.

a) A_1 und B_1 seien die Abbildungen von A und B mit Hilfe der Inversion durch den mit Radius ϱ um O gelegten Kreis. Aus

$$OA \cdot OA_1 = \varrho^2$$

und

$$OB \cdot OB_1 = \varrho^2$$

folgt

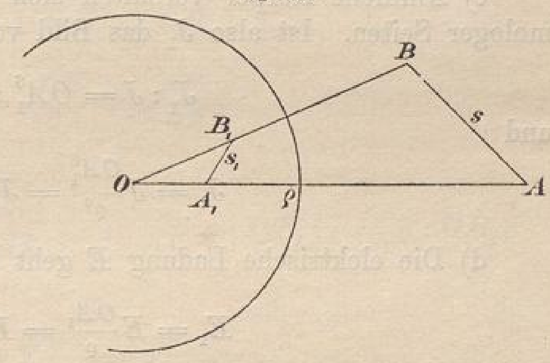
$$OA : OB = OB_1 : OA_1$$

und damit die Ähnlicheit der Dreiecke OAB und OB_1A_1. Demnach ist

$$AB : A_1B_1 = OA : OB_1$$

oder, da $OB_1 = \frac{\varrho^2}{OB}$ ist,

Fig. 105.



$$AB : A_1B_1 = OA : \frac{\varrho^2}{OB} = OA \cdot OB : \varrho^2 = \frac{\varrho^2}{OA_1} : OB_1 = \varrho^2 : OA_1 \cdot OB_1.$$

Ist nun der Winkel α unendlich kein, also auch $AB = s$ und $A_1B_1 = s_1$ unendlich klein, so sind auch die Unterschiede zwischen OA_1 und OB_1, ebenso die zwischen OA und OB unendlich klein, man darf also dann statt $OA \cdot OB$ setzen OA^2, statt $OA_1 \cdot OB_1$ ebenso OA_1^2.

Wie also auch ein kleines Element s einer Geraden oder einer Kurve gerichtet sei, stets gilt für dieses und sein Inversionsbild die Proportion

$$s : s_1 = OA^2 : \varrho^2 = \varrho^2 : OA_1^2.$$

Ein kleines von A ausgehendes Linien- oder Bogenelement giebt demnach als Inversionsbild ein Element

$$s_1 = s \cdot \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \cdot \frac{OA_1^2}{\varrho^2}.$$

(Für gröfseren Winkel α gilt diese Beziehung nicht, denn für solche ist $s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1$.)

Daraus läfst sich der isogonale Charakter und die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen bei dieser Übertragung ableiten. Ein kleines Dreieck mit den Seiten s, t, u geht in ein solches mit den Seiten

$$s_1 = s\frac{\varrho^2}{OA^2},\quad t_1 = t\frac{\varrho^2}{OA^2},\quad u_1 = u\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

über. Die Ähnlichkeit ist also nachgewiesen.

b) Ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten. Ist also die kleine Fläche F_1 das Inversionsbild von F, so ist $F_1 : F = OA_1^4 : \varrho^4$, d. h.

$$F_1 = F \cdot \frac{OA_1^4}{\varrho^4} = F\frac{\varrho^4}{OA^4}.$$

c) Ähnliche Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Seiten. Ist also J_1 das Bild von J, so ist

$$J_1 : J = OA_1^6 : \varrho^6$$

und

$$J_1 = J\frac{OA_1^6}{\varrho^6} = J\frac{\varrho^6}{OA^6}.$$

d) Die elektrische Ladung E geht über in

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA}.$$

Der Beweis ist oben gegeben.

e) Aus

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA} \quad \text{und} \quad s_1 = s\frac{OA_1^2}{\varrho^2} = s\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

folgt durch Division

$$\frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s}\frac{\varrho}{OA_1} = \frac{E}{s}\frac{OA}{\varrho}.$$

Nun ist aber die Dichte der elektrischen oder ponderablen Belegung eines Linienelements

$$\delta_1 = \frac{E_1}{s_1} \quad \text{bezw.} \quad \delta = \frac{E}{s}.$$

Das Bild der Belegung δ eines Linienelements also ist

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho}{OA_1} = \delta \frac{OA}{\varrho}.$$

f) Dieselbe Betrachtung für die Belegung eines Flächenelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^3}{OA_1^3} = \delta \frac{OA^3}{\varrho^3}.$$

g) Dieselbe für die Belegung eines Körperelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^5}{OA_1^5} = \delta \frac{OA^5}{\varrho^5}.$$

h) Auch Potentialwerte lassen sich durch Abbildung übertragen. Befindet sich z. B. in A die Ladung E, deren Potentialwert in B gleich $V = \frac{E}{s}$ ist, so giebt die Abbildung in A_1 die Ladung

$$E_1 = E \frac{\varrho}{OA} = E \frac{OA_1}{\varrho},$$

deren Potential in B_1 den Wert $V_1 = \frac{E_1}{s_1}$ hat. Für gröfsern Winkel α gilt aber die Proportion

$$s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1,$$

d. h. es ist

$$s_1 = s \frac{OB_1}{OA} = s \frac{OA_1}{OB}.$$

Es ist also

$$V : V_1 = \frac{E}{s} : \frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s} : \frac{E \frac{\varrho}{OA}}{s \frac{OB_1}{OA}} = 1 : \frac{\varrho}{OB_1} = OB_1 : \varrho = \varrho : OB,$$

also

$$V_1 = V \frac{OB}{\varrho} = V \frac{\varrho}{OB_1}.$$

Das Verhältnis der Potentiale ist also unabhängig von der Lage des geladenen Punktes, dagegen abhängig von der Lage des Punktes, für den der Potentialwert genommen ist und vom Inversionsradius. Demnach gilt das Gesagte auch von mehreren Ladungen.

Hat man z. B. drei Ladungen, deren Potentialwerte für B die Summe $U + V + W$ geben, so findet man für den Bildpunkt B_1 den Potentialwert der abgebildeten Ladungen als

$$U_1 + V_1 + W_1 = (U + V + W) \frac{OB}{\varrho} = (U + V + W) \frac{\varrho}{OB_1}.$$

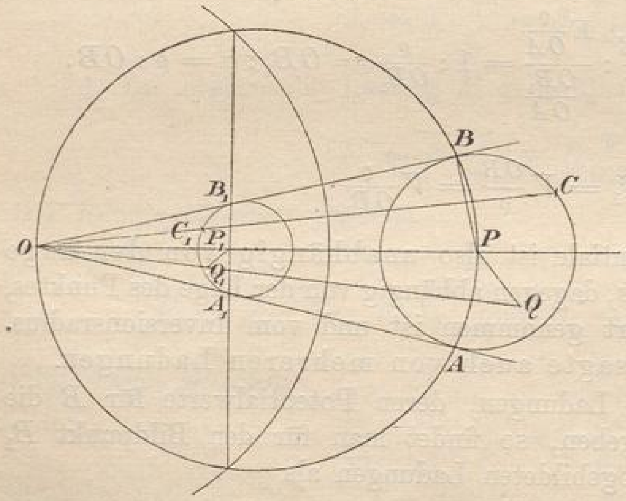
Als bekannt werde nun vorausgesetzt (vgl. Meth. Lehrbuch II, Stereom. Kap. IX), dafs durch Inversion Kugeln wieder in Kugeln übergehen, wobei die Schnittwinkel zweier Kugeln erhalten bleiben, so dafs z. B. eine Kugel, die die Inversionskugel rechtwinklig schneidet, in sich selbst übergeht. Ebenen gehen in Kugeln über, die durch das Inversionscentrum gehen, Kugeln durch letzteres verwandeln sich in Ebenen. Das Inversionscentrum ist äufserer Ähnlichkeitspunkt der Kugel und ihrer Bildkugel, woraus sich harmonische Beziehungen ergeben. Die Rechteckteilung des Raums durch koncentrische Kugeln, Meridianebenen und Kugelflächen geht über in eine solche durch excentrische Kugeln, die ein Kugelbüschel durch einen Kreis orthogonal schneiden und in eine dritte Orthogonalschar von Flächen, die gewissermafsen als Kegel mit kreisförmig gebogenen Seiten betrachtet werden können. Alle diese Beziehungen lassen sich elementar entwickeln, wozu man besonders Möbius und Reye vergleiche. Vorbeugend sei bemerkt, dafs im Raum die Niveauflächen eines Problems nicht in solche des Inversions-Problems übergehen. In der Ebene dagegen findet dies statt.

141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen.

Unter den zahlreichen physikalischen Sätzen, die sich aus obigem ableiten lassen, ist folgender von besonderer Wichtigkeit:

Haben mehrere Niveauflächen desselben Anziehungsproblems Belegungen, deren Potentiale nach aufsen hin (oder nach innen hin) überall gleichwertig sind, so haben auch ihre Bilder Potentiale von dieser Eigenschaft.

Fig. 106.



Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie ihr gleich stark geladener Mittelpunkt. Durch Abbildung mittels eines um einen äufseren Punkt geschlagenen Kreises geht sie in eine Kugelschale über, bei der nach Nr. 139 die Dichte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung (z. B.

OA_1^3, OB_1^3, OC_1^3) ist. Da der Kreis durch den Mittelpunkt P, durch O und mit OP als Durchmesser (also durch A und B) in die Gerade $A_1 B_1$ übergeht, d. h. in die Berührungssehne, ist P_1 der O zugeordnete Punkt. Die Ladung von P_1 wird nach d)

$$m_1 = m \frac{\varrho}{OP}.$$

Die Belegung der neuen Kugel und die Ladung des Punktes P_1 haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Die Potentialwerte für gröfsere Entfernungen stimmen überein, also müssen beide Belegungen gleich $m \frac{\varrho}{OP}$ sein.

So ergiebt sich das schon in Nr. 132 behandelte Problem in äufserst einfacher Weise.

Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat im Innern überall den Potentialwert $V = \frac{m}{r}$, z. B. auch im beliebig liegenden Punkte Q, der in Q_1 übergeht. Nach h) wird

$$V_1 = V \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{r} \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{OQ_1} \cdot \frac{\varrho}{r},$$

also umgekehrt proportional OQ_1. Nun ist aber nach vorigem Beispiel die Belegung

$$m_1 = m \cdot \frac{\varrho}{OP} = m \frac{OP_1}{\varrho},$$

also ist

$$V_1 = \frac{m}{OQ} \cdot \frac{\varrho}{r} = \frac{m_1 \cdot OP}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{1}{OQ_1} = \frac{1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot m_1}{r}.$$

Aus $r : r_1 = OP : M_1$ folgt

$$r = r_1 \frac{OP}{OM_1},$$

demnach wird

$$V_1 = \frac{m_1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot OM_1}{r_1 OP} = \frac{m_1 \frac{OM_1}{r_1}}{OQ_1},$$

oder, wenn man $m_1 \frac{OM_1}{r_1} = m_0$ setzt,

$$V_1 = \frac{m_0}{OQ_1},$$

d. h. gleich dem Potential einer in O angebrachten Masse m_0, die zu m_1 in dem früher dargelegten Verhältnisse steht. Also auch hier bestätigt sich alles früher Abgeleitete.

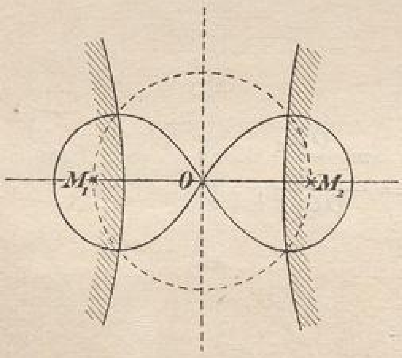
Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man einen Inversionskreis wählt, der die Kugel auf sich selbst abbildet, indem er sie rechtwinklig schneidet.

Beispiel. Koncentrische, homogen mit derselben Masse belegte Kugelschalen haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Folglich: Kreise einer sogenannten Kreisschar, die mit gleichen Massen so belegt sind, dafs auf jeder die Dichtigkeiten umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung von einem der Büschelpunkte sind, haben nach aufsen hin dasselbe Potential.

Beispiel. Die homogen mit Masse ausgefüllte Vollkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie der mit derselben Masse belegte Mittelpunkt. Nach 139 geht sie durch Abbildung in eine Kugel über, deren Dichtigkeit im Innern umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung vom Inversionscentrum oder von dessen zugeordnetem Punkte in der Bildkugel ist. Das Potential nach aufsen ist überall gleich dem einer im letzteren Punkte befindlichen Masse, deren Gröfse $m \cdot \frac{\varrho}{OM}$ gleich der der Bildmasse ist. Damit ist die Ergänzung zu Nr. 135 gegeben.

Die koncentrische homogen erfüllte Hohlkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie die gleiche Masse im Centrum. Sie geht in eine excentrische Hohlkugel des vorigen Dichtigkeitsgesetzes über, für deren Büschelpunkte dasselbe gilt. Das Potential im Hohlraum der ersteren ist konstant, das der letzteren ergiebt sich mit bei der Schale als gleich dem des äufseren Büschelpunktes mit einer leicht zu bestimmenden Ladung. Der innere Büschelpunkt ist nach dem Asymptotengesetz der Schwerpunkt der so mit Masse erfüllten Kugel.

Fig. 107.



Beispiel. Jede Niveaufläche des symmetrischen Zweipunktsystems für gleichartige Ladungen hat bei der früher ermittelten Belegung nach aufsen hin dieselbe Potentialwirkung, wie die Punkte M_1 und M_2. Man bilde mittels des um O gelegten, durch M_1 und M_2 gehenden Kreises ab, dann gehen M_1 und M_2 in sich selbst über, die Niveaufläche geht in ihre reciproke Fläche mit einer ganz bestimmten Belegung über, z. B. bei der durch O gehenden Niveaufläche in eine asymptotische Drehungsfläche, deren Gleichung leicht aus der ersteren abzuleiten ist. Die Punkte des Aufsenraumes der ursprünglichen Niveaufläche gehen in die des nicht schraffierten Raumes über. Dort sind also die Niveauflächen und Stromlinien der neuen Belegung ebenfalls identisch mit denen von M_1 und M_2. Daraus lassen sich weitere Schlüsse über das Zweipunktproblem ziehen, da sich für die reciproken Punkte eine einfache Beziehung herausstellt. — Entsprechendes gilt von jeder Anordnung geladener Punkte auf dem Kreise oder auf der Kugel.

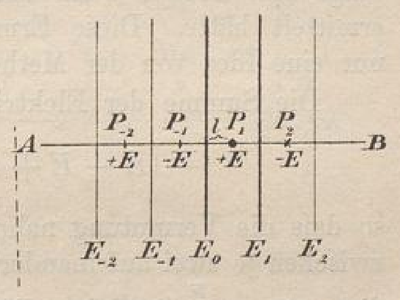
Obwohl im allgemeinen Niveauflächen nicht wieder in Niveauflächen übergehen, lassen sich in der genannten Weise aus gelösten Problemen neue ableiten, und dazu liefsen sich noch zahlreiche Beispiele geben.

142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen. Thomson hat aber auch Beispiele behandelt, bei denen mehrfache Spiegelung vorkommt. Auch diese bedeutungsvolle Ergänzung seiner Methode soll an einfachen Beispielen verdeutlicht werden, bei denen es sich um Influenzerscheinungen auf mehreren Flächen zugleich handelt.

Aufgabe. In der Mitte zwischen zwei unbegrenzten Parallelebenen E_0 und E_1 befinde sich ein Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Dieser rufe auf jeder der leitenden Ebenen Influenz hervor, die beiden negativen Influenzelektrizitäten aber beeinflussen sich gegenseitig. Die elektrische Dichtigkeit für beliebig liegende Punkte der beiden Ebenen soll untersucht werden.

Auflösung. Man spiegele P_1 und die Ebene E_1 gegen die Ebene E_0, was P_{-1} mit der Ladung $-E$ und die Ebene E_{-1} giebt. Alles jetzt Vorhandene spiegele man gegen die Ebene E_1, das neu Erhaltene gegen E_0, das jetzt Neue gegen E_0 u. s. w. So erhält man auf der Geraden AB unendlich viele Punkte in gleichen Abständen $2l$ mit wechselnden Ladungen $+E$ und $-E$ und dazwischen entsprechende Ebenen. Jede der Ebenen ist Symmetrieebene des Problems der so geladenen Punkte. Die Punkte rechts und links von E_0 z. B. bringen auf der Ebene eine Influenzverteilung hervor, die identisch mit der auf E_1 hervorgebrachten ist. Entfernt man jetzt alles, was rechts und links von E_1 liegt, so hat man die Lösung des Problems. Denn durch die entsprechende Belegung beider Ebenen ist alles Aufsenliegende ersetzt worden.

Fig. 108.



Nach Nr. 136 geben die Punkte P_1 und P_{-1} zusammen der Ebene E_0 in einem beliebigen Punkte die elektrische Dichtigkeit

$$\delta_1 = \frac{El}{2\pi(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn r die Entfernung des untersuchten Punktes von der Geraden AB ist. Die Punkte P_2 und P_{-2} haben von E_0 die Entfernung $3l$, sie haben entgegengesetzte Ladungen, wie die vorigen, verändern also die Normalkraft und geben die Dichtigkeit

$$\delta_2 = -\frac{E\cdot 3l}{2\pi(3l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

P_3 und P_{-3} geben

$$\delta_3 = +\frac{E5l}{2\pi(25l^2+r^2)},$$

und so geht es in unendlicher Reihe weiter. Die Dichtigkeit in dem untersuchten Beispiele wird also

$$\delta = -\frac{El}{2\pi}\left[\frac{1}{[l^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{[(3l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{[(5l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{[(7l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \cdots\right].$$

Diese Formel giebt die Dichtigkeit der Belegung beider Ebenen E_0 und E_1 in jedem Punkte. Die Reihe in der Klammer ist eine schnell konvergierende oszillierende. Bildet man die Lösungen der ersten n bezw. $(n+1)$ Glieder, so liegt die wirkliche Lösung zwischen diesen Resultaten. Man kann also für jeden Standpunkt der Berechnung die Fehlergrenze angeben. Eine geschlossene Lösung würde man allerdings erst haben, wenn man die Formel für die Summe der Reihe ermittelt hätte. Diese Ermittelung soll aber hier unterbleiben, da nur eine Idee von der Methode gegeben werden soll.

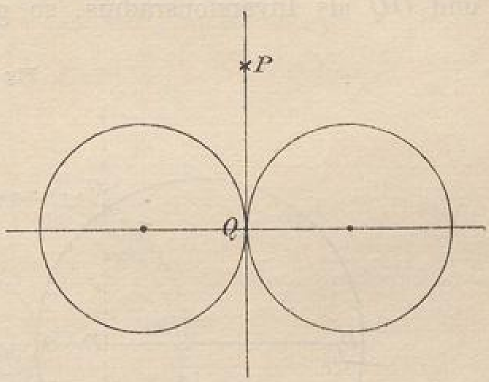
Die Summe der Elektrizitäten für jede Gesamtebene würde sein

$$-[E-E+E-E+E-E+\cdots],$$

so dafs die Vermutung nahe liegt, es würde sich um den Mittelwert zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungswerten O und $-E$, d. h. um $-\frac{E}{2}$ handeln. Dies ist in der That der Fall, denn man kann sich die beiden Ebenen im unendlichen Bereiche, wo die Dichtigkeit gleich Null ist, als geschlossen denken, wodurch nichts geändert wird. Man könnte sich z. B. vorstellen, dafs es sich um ein Drehungsellipsoid von der Drehungsachse $2l$ handelt, welches aber bis ins Unendliche reicht. Auf diesem würde die Influenzelektrizität gleich $-E$ sein, so dafs auf jeden der beiden Teile $-\frac{E}{2}$ kommt.

143) **Mehrfache Spiegelung bei Berührungskugeln.** Bildet man das Problem mit Hilfe irgend einer Kugel ab, so erhält man die Lösung des Problems zweier einander berührender Kugelflächen, bei denen der influenzierende Punkt irgendwo auf einer dritten Kugel liegt, die den Raum zwischen den beiden anderen isothermisch teilt, d. h. so, dafs die eine Kugel in Bezug auf sie zur anderen reciprok ist. Die Berührung kann dabei eine äufserliche oder eine innerliche sein. Hat die abbildende Kugel ihr Centrum irgendwo auf der den Raum zwischen den beiden Parallelebenen halbierenden Parallelebene, so handelt es sich um den durch Fig. 109 dargestellten Symmetriefall, wo P auf zwei sich berührenden gleich grofsen Kugeln Iufluenz hervorruft. Die Übertragung geschieht nach den oben auseinandergesetzten Grundsätzen.

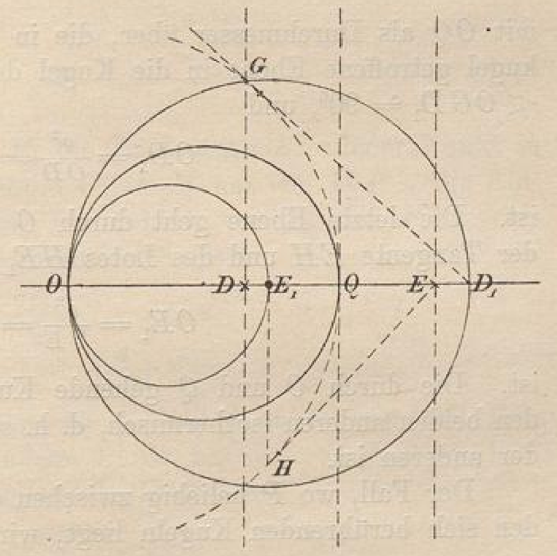
Fig. 109.



Wählt man als Inversionscentrum einen beliebigen Punkt O im Aufsenraume der Parallelebene, als Inversionsradius die Entfernung $OQ = \varrho$ bis zur Mittelebene, so verwandelt sich diese in eine Kugel mit dem Durchmesser OQ. Die von der Inversionskugel in F und G geschnittene Ebene geht über in eine Kugel durch O, G und F. Der rechte Winkel OGD_1 giebt einen vierten Punkt E_1, und dabei ist von selbst

$$OD_1 = \frac{\varrho^2}{OD} = \frac{\varrho^2}{\varrho - l}.$$

Fig. 110.



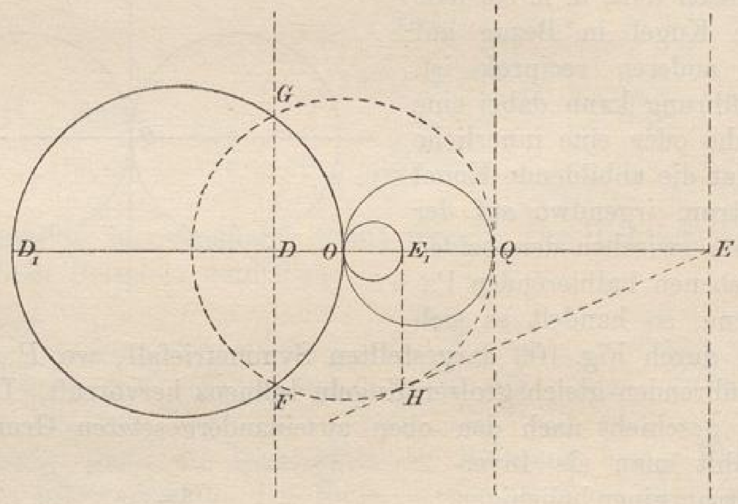
Für die letzte Kugel ergiebt sich der Punkt E_1 mit Hilfe der Tangente EH und des Lotes HE_1, wobei

$$OE_1 - \frac{\varrho^2}{OE} = \frac{\varrho^2}{\varrho - l}$$

ist. Die äufsere Kugel ist das Reciproke des Innern in Bezug auf die mittlere Kugel, was dem Begriffe der isothermischen Teilung entspricht. Auf der letzteren Kugel liegt irgendwo der influenzierende Punkt, der die beiden anderen Kugeln beeinflufst.

Wählt man einen beliebigen Punkt O zwischen den Parallelebenen und OQ als Inversionsradius, so geht die Mittelebene in die Kugel

Fig. 111.



mit OQ als Durchmesser über, die in F und G von der Inversionskugel getroffene Ebene in die Kugel durch O, G, F und D_1, wobei $\sphericalangle\, OGD_1 = 90^0$, und

$$OD_1 = \frac{\varrho^2}{OD} = \frac{\varrho^2}{l-\varrho}$$

ist. Die letzte Ebene geht durch O und E_1, wobei E_1 mit Hilfe der Tangente EH und des Lotes HE_1 gefunden wird und

$$OE_1 = \frac{\varrho^2}{OE} = \frac{\varrho^2}{\varrho+l}$$

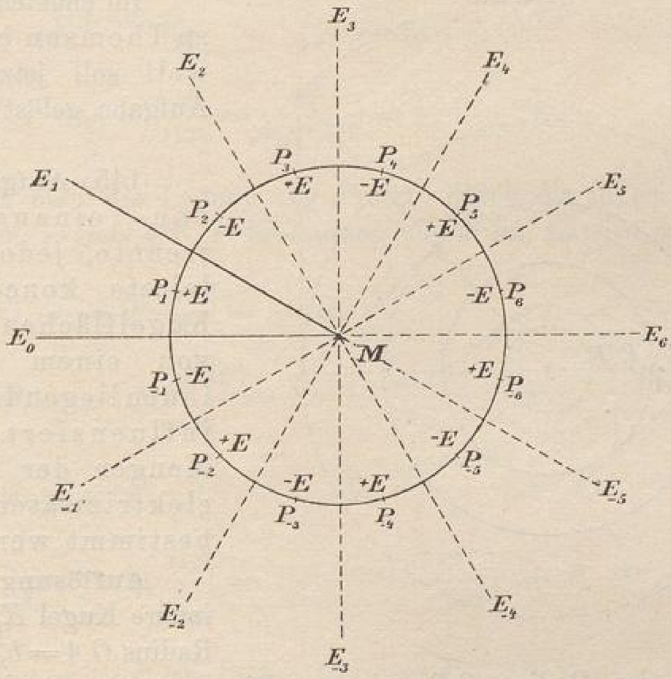
ist. Die durch O und Q gehende Kugel teilt den Raum zwischen den beiden anderen isothermisch, d. h. so, dafs die eine die Abbildung der anderen ist.

Der Fall, wo P beliebig zwischen den beiden Parallelebenen oder den sich berührenden Kugeln liegt, wird ganz ähnlich behandelt.

144) **Aufgabe.** Zwei Ebenen E_0 und E_1 mögen sich unter dem Winkel $30^0 = \frac{360^0}{12}$ schneiden. Auf der den Winkel halbierenden Ebene liege ein influenzierender Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Die Influenzverteilung soll untersucht werden.

Auflösung. Man bilde wie vorher die Spiegelbilder, was Punkte P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 mit abwechselnden Ladungen $-E$, $+E$, und ebenso Punkte P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, ... P_{-6} mit solchen Ladungen giebt. Durch die sämtlichen Punkte werden die beiden Ebenen ersetzt.

Fig. 112.



P_1 und P_{-1} haben von E_0 die Entfernung l_1. Jeder Punkt in Entfernung x von der Senkrechten durch M hat von $P_1 P_{-1}$ die Entfernung $r_1 = x - MA_1$, wo A_1 den Schnitt von E_0 und $P_1 P_{-1}$ bedeutet. Die Dichte in ihm bestimmt sich als

$$\delta_1 = -\frac{E l_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(l_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

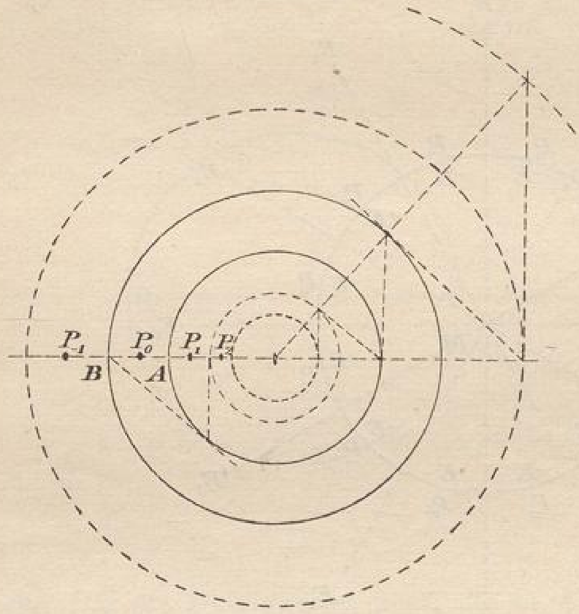
Ebenso haben P_2 und P_{-2} von E_0 die leicht zu berechnende Entfernung l_2. Der vorher behandelte Punkt hat von $P_2 P_{-2}$ die Entfernung $r_2 = x - A_2$. Dies giebt die Dichtigkeit

$$\delta_2 = +\frac{E l_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(l_2^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso bestimmt sich die aus den übrigen Punkten P_3 und P_{-3}, P_4 und P_{-4}, P_5 und P_{-5}, P_6 und P_{-6} hervorgehende Dichtigkeit. Diese kann also für die ganze Ebene E_0, also auch für die Halbebene ME_0 in geschlossener Form berechnet werden. Dies ist für jeden Winkel $\alpha = \frac{360^0}{2\,n}$ möglich, sobald n ganze Zahl ist.

Durch Abbildung erhält das Problem hier zwei sich unter α schneidende Kugeln und einen zwischen ihnen „isothermisch" liegenden Punkt.

Fig. 113.



Im engsten Anschlufs an Thomson bezw. Maxwell soll jetzt folgende Aufgabe gelöst werden:

145) **Aufgabe:** Zwei von einander getrennte, jedoch abgeleitete koncentrische Kugelflächen werden von einem zwischen ihnen liegenden Punkte influenziert. Die Mengen der Influenzelektrizitäten sollen bestimmt werden.

Auflösung. Die erste innere Kugel K_1 habe den Radius $OA = b$, die zweite, äufsere K_2 den Radius $OB = b \cdot e^w$. Die Lage des Punktes P sei durch $OP = b \cdot e^u$ bestimmt.

a) Zunächst werde P gegen K_1 gespiegelt, was den Punkt Q_0 geben mag, dann dieser gegen K_2, was P_1 giebt, dieser gegen K_1, was Q_2 giebt u. s. w. Dabei ist für jede durch K_1 vermittelte Spiegelung

$$OP \cdot OQ_0 = b^2, \quad OP_1 \cdot OQ_1 = b^2, \; \ldots, \; OP_s \cdot OQ_s = b^2;$$

für jede durch K_2 vermittelte ist

$$OQ_0 \cdot OP_1 = b^2 e^{2w}, \quad OQ_1 \cdot OP_2 = b^2 e^{2w}, \; \ldots, \; OQ_{s-1} \cdot OP_s = b^2 e^{2w}.$$

Demnach ist

$$OQ_0 = \frac{b^2}{OP} = \frac{b^2}{be^u} = be^{-u},$$

$$OP_1 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_0} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-u}} = be^{u+2w}$$

$$OQ_1 = \frac{b^2}{OP_1} = \frac{b^2}{be^{u+2w}} = be^{-(u+2w)}$$

$$OP_2 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_1} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-(u+2w)}} = be^{u+4w}$$

$$\vdots$$

$$OP_s = \frac{b^2 e^{2w}}{OP_{s-1}} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-(u+2(s-1)w)}} = be^{u+2sw}$$

$$OQ_s = \frac{b^2}{OP_s} = \frac{b^2}{be^{u+2sw}} = be^{-(u+2sw)}.$$

Bezeichnet man die Ladung der Punkte durch die ihnen beigelegten Buchstaben, so dafs z. B. P die Ladung von P ist, so wird nach Nr. 139

$$Q_0 = -P\frac{be^{-u}}{b} = -Pe^{-u},$$

$$P_1 = -Q_0 \cdot \frac{OP_1}{\varrho_2} = Pe^{-u} \cdot \frac{be^{u+2w}}{be^{w}} = Pe^{w},$$

$$Q_1 = -P_1 \cdot \frac{OQ_1}{\varrho_1} = -Pe^{w}\frac{be^{-(u+2w)}}{b} = Pe^{-(u+w)},$$

$$P_2 = -Q_1\frac{OP_2}{\varrho_2} = Pe^{-(u+w)} \cdot \frac{be^{u+4w}}{be^{w}} = P \cdot e^{2w},$$

allgemein

$$P_s = Pe^{sw}, \quad Q_s = -Pe^{-(u+sw)}.$$

Dies ist bis ins Unendliche fortzusetzen.

b) Man bilde jetzt P gegen K_2 ab, was Q'_1 giebt, sodann Q'_1 gegen K_1, was P'_1 giebt, dieses gegen K_2, was Q'_2 giebt u. s. w. Dann wird entsprechend

$$OQ'_1 = be^{2w-u}, \quad OP'_1 = be^{u-2w}$$

$$OQ'_2 = be^{4w-u}, \quad OP'_1 = be^{u-4w},$$

und allgemein

$$OP'_s = be^{u-2sw}, \quad OQ'_s = be^{2sw-u}.$$

Die Ladungen werden allgemein

$$P'_s = Pe^{-sw}, \quad Q'_s = -Pe^{sw-u}.$$

c) Zu den Niveauflächen sämtlicher Punkte gehören die beiden Kugelflächen und alle ihre gegenseitigen Abbildungen. Die Kugel K_1 mit ihrer Belegung kann durch die innere Punktreihe, die Kugel K_2

mit der ihrigen durch die äufsere Punktreihe ersetzt werden. Die innere Reihe enthält alle Punkte P' und Q, die äufsere alle Punkte P und Q', alle P sind positiv, alle Q negativ geladen.

Die Ladung der inneren Kugel ist gleich der Summe der Ladungen aller Q und aller P'. Die einen geben

$$\sum_0^\infty Q_s = -Pe^{-u}(1 + e^{-w} + e^{-2w} + e^{-3w} + \cdots)$$

$$= -P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{-u}e^{w}}{e^{w}-1} = P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1},$$

die anderen

$$\sum_1^\infty P'_s = Pe^{-w}(1 + e^{-w} + e^{-2w} + \cdots)$$

$$= P\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} = P\frac{1}{e^{w}-1}.$$

Die Ladung der inneren Kugel wird also

$$E_1 = -P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1} + P\frac{1}{e^{w}-1} = -P\frac{e^{w-u}-1}{e^{w}-1},$$

oder

$$E_1 = -\frac{P}{e^{u}}\cdot\frac{e^{w}-e^{u}}{e^{w}-1},$$

oder, da

$$e^{u} = \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OA} \quad \text{und} \quad e^{w} = \frac{OB}{b} = \frac{OB}{OA}$$

ist,

$$E_1 = -P\cdot\frac{OA}{OP}\cdot\frac{\frac{OB}{b}-\frac{OP}{b}}{\frac{OB}{b}-1},$$

d. h.

$$E_1 = -P\frac{OA}{OP}\cdot\frac{OB-OP}{OB-OA} = -P\frac{OA\cdot PB}{OP\cdot AB}.$$

d) Die äufseren Punkte geben auf der äufseren Kugel folgende Influenzmengen: P_s mit Ladung Pe^{sw} giebt auf der Kugel

$$P_s\cdot\frac{\varrho_2}{OP_s} = Pe^{sw}\cdot\frac{be^{w}}{be^{u+2sw}} = Pe^{-(u+(s-1)w)}.$$

Dies giebt die Reihe

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} = Pe^{-u}[e^{0} + e^{-w} + e^{-2w} + \cdots] = P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1}.$$

Jedes Glied der anderen Gruppe Q_s' mit Ladung $-Pe^{sw-u}$ giebt auf der Aufsenkugel die Ladung

$$-Pe^{sw-u}\frac{\varrho_2}{OQ_s'} = -Pe^{sw-u}\cdot\frac{be^w}{be^{2sw-u}} = -Pe^{w(1-s)}.$$

Die Summe von $s=1$ bis $s=\infty$ wird

$$-P\left[e^0 + e^{-w} + e^{-2w} + \cdots\right] = -P\frac{1}{1-e^{-w}} = -P\frac{e^w}{e^w-1}.$$

Im ganzen ist die Belegung

$$-P\frac{e^w}{e^w-1} + P\frac{e^{w-u}}{e^w-1} = -P\frac{e^w-e^{w-u}}{e^w-1}.$$

Setzt man wieder

$$e^w = \frac{OB}{OA} \quad \text{und} \quad e^u = \frac{OP}{OA}$$

ein, so erhält man als Ladung

$$E_2 = -P\cdot\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}.$$

e) Dabei ist

$$E_1 + E_2 = -P\left[\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB} + \frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}\right] = -P\frac{OA\cdot PB + (OA+AB)AP}{OP\cdot AB}$$

$$= -P\frac{OA(PB+AP)+AB\cdot AP}{OP\cdot AB} = -P\cdot\frac{OA\cdot AB + AB\cdot AP}{OP\cdot AB}$$

$$= -P\cdot\frac{OA+AP}{OP} = -P.$$

Die beiden Kugeln zusammengenommen verhalten sich also wie ein geschlossener Hohlraum, bei dem die Influenzelektrizität dieselbe Menge hat, wie die influenzierende.

Ferner ist

$$E_1 : E_2 = OA\cdot PB : OB\cdot PA.$$

[Sind OA und OB unendlich grofs, aber AB endlich, so ist

$$E_1 : E_2 = PB : AP,$$

d. h. auf parallelen Ebenen verhalten sich die Mengen der Influenzelektrizität umgekehrt, wie die Abstände von der Ladung P_1 und zwar ist

$$E_1 = -P\frac{PB}{AB}, \quad E_2 = -P\cdot\frac{AP}{AB}.$$

Damit ist ein wichtiges Resultat für das allgemeine Ebenenproblem gefunden, welches ganz ähnlich, wie das Kugelproblem, auf zwei Gruppen von Punkten führt.]

Liegt bei den koncentrischen Kugeln P auf der isothermisch teilenden Kugel, so ist

$$OA \cdot OB = OP^2 = (OA + AP)(OB - BP),$$

also

$$OA \cdot OB = OA \cdot OB + OB \cdot AP - BP(OA + AP),$$

d. h.

$$OB \cdot AP = BP \cdot OA + BP \cdot AP = BP \cdot OP.$$

Demnach wird in diesem Falle

$$E_1 = -E\frac{OA \cdot BP}{OP \cdot AB} = -E\frac{OB \cdot AP - BP \cdot AP}{OP \cdot AB}$$

$$= -E\frac{AP \cdot (OB - BP)}{OP \cdot AB} = -E\frac{AP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E\frac{AP}{AB}.$$

$$E_2 = -E\frac{OB \cdot AP}{OP \cdot AB} = -E\frac{BP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E\frac{BP}{AB}.$$

Das Verhältnis vereinfacht sich also zu

$$E_1 : E_2 = AP : BP,$$

während

$$E_1 + E_2 = -E$$

bleibt.

[Sind die Kreise unendlich grofs, also Parallelebenen, so liegt jetzt P auf der den Zwischenraum halbierenden Parallelebene und es wird $AP = BP$, also $E_1 = E_2$.]

In diesem Falle bilden die Radien der Bildpunkte, ebenso die der Ladungen, eine einfachere geometrische Reihe (letztere mit wechselnden Vorzeichen), so dafs die Rechnung einige Erleichterungen bietet, namentlich wenn man $OP_1 = 1$ setzt.

Die Berechnung der Dichtigkeit in jedem Punkte hat so zu erfolgen, dafs man bei der Innenkugel nach der früheren Dichtigkeitsformel für jeden Innenpunkt und seine Ladung die Dichtigkeiten festsetzt und die oszillierende Reihe aufstellt. Die Summierung derselben macht im allgemeinen Schwierigkeiten, da sie aber schnell konvergiert, ist der Fehler leicht einzugrenzen, denn die Summe liegt zwischen der Summe der n ersten und der Summe der $(n + 1)$ ersten Glieder. — Durch Abbildung kann man zu excentrischen Kreisen und auseinanderliegenden Kreisen übergehen.

Weitere Beispiele, besonders auch die Übertragung des Problems der Kreisscheibe auf die Kugelkalotte, findet man bei Maxwell und Thomson. Die Fruchtbarkeit der Methode ergiebt sich aber schon aus den hier behandelten Problemen.