



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

130) Vorbemerkungen über die Inversion

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Kapitel VII.

Die Methode der elektrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume.*)

130) Vorbemerkungen. In diesem Kapitel kommen einige Theorien zur Anwendung, die in den neueren Lehrbüchern der Geometrie (vergl. z. B. Methodisches Lehrbuch, II) behandelt werden, die harmonischen Punkte, Pol und Polare, Inversion oder Abbildung durch reciproke Radiivectores, die Lehre von den Steinerschen Kreisscharen (elliptische und hyperbolische), die Kreisverwandtschaft von Möbius und dessen Kugelverwandtschaft.

Der Gedanke der Inversion geht bis auf Apollonius von Perga zurück, dessen Kreisberührungen (Taktionsprobleme) später von Vieta, Newton, Euler und Fufs behandelt und von Fermat auf Kugeln ausgedehnt wurden. Nachdem sich auch Gaultier, Poncelet, Monge und Steiner damit beschäftigt hatten, stellte Plücker im Jahre 1834 die Inversion als ein neues Übertragungsprinzip auf, mit dem sich dann auch Magnus befaßte. Plücker gebührt die Priorität vor W. Thomson, der in England als Schöpfer dieses Gebietes betrachtet wird, obwohl sein „Prinzip der elektrischen Bilder“ erst 1845 veröffentlicht und im Cambridge and Dublin Mathematical Journal von 1848 ausführlicher dargestellt wurde. Dies geschah im Anschluß an Poisson, der mit Hilfe der Kugelfunktionen, d. h. mit Hilfe höherer Rechnungen, die Resultate bereits gefunden hatte, zu denen Thomson den elementaren Weg fand. Liouville setzte 1847 die Thomsonschen Forschungen fort, Lamé drang weiter vor in den *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Kirchhoff benutzte die Bicircularkoordinaten zur Anbahnung der Lehre von den stationären Strömungen in ebenen Platten. Reye stellte die Kugelverwandtschaft

*) Dieses Kapitel kann überschlagen werden, wenn dem Leser die Gesetze der Inversion nicht bekannt sind. Das zur Erläuterung nötigste ist jedoch in den Text aufgenommen.

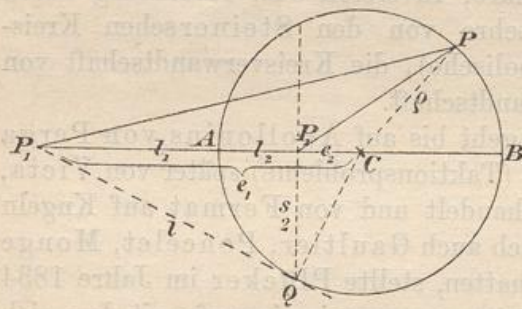
in einer Monographie dar. Auch Townsend, Hart, Casey haben sich mit diesen Lehren beschäftigt.

Es handelt sich, kurz gesagt, darum, mit Hilfe einer Transformation aus bereits gelösten Beispielen zur Geometrie und mathematischen Physik neue abzuleiten, also einen einfachen Übertragungsmechanismus an Stelle der umfangreichen Rechnungen zu setzen, über deren Schwierigkeiten man sich nach Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, unterrichten möge.

Um den Gang der Untersuchungen nicht durch mathematische Darlegungen unterbrechen zu müssen, geben wir für diejenigen Leser, denen die neueren Theorien nicht bekannt sind, einige geometrische Vorbemerkungen, verweisen aber im übrigen auf die neueren Lehrbücher (z. B. Method. Lehrbuch II).

131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel.
 Zu jedem Punkte P_1 außerhalb eines Kreises giebt es auf dem zugehörigen Durchmesser einen zweiten Punkt P_2 , der so liegt, daß P_1, P_2 und die Endpunkte A und B des Durchmessers harmonische Punkte sind. Für diese gilt also, von den Vorzeichen abgesehen, die Proportion

Fig. 103.



$P_1A : P_2A = P_1B : P_2B$,
 oder, wenn ρ der Radius des Kreises ist und $l_1 = P_1A$,
 $l_2 = P_2A$, $e_1 = P_1C$, $e_2 = P_2C$ gesetzt wird

$$P_1A : P_2A = P_1B : P_2B,$$

oder, wenn ρ der Radius des Kreises ist und $l_1 = P_1A$,

$l_2 = P_2A$, $e_1 = P_1C$, $e_2 = P_2C$ gesetzt wird

$$1) \quad l_1 : l_2 = (e_1 + \rho) : (e_2 + \rho).$$

Nach Pythagoras ist ferner $CQ^2 = CP_2 \cdot CP_1$ (Kathetenquadrat gleich dem Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Stück derselben), also

$$2) \quad e_1 \cdot e_2 = \rho^2,$$

was die Inversionsbeziehungen

$$e_1 = \frac{\rho^2}{e_2} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{\rho^2}{e_1}$$

giebt, die für $\rho = 1$ in

$$e_1 = \frac{1}{e_2} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{1}{e_1}$$

übergehen, wobei die Reciprozität am reinsten hervortritt.