Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

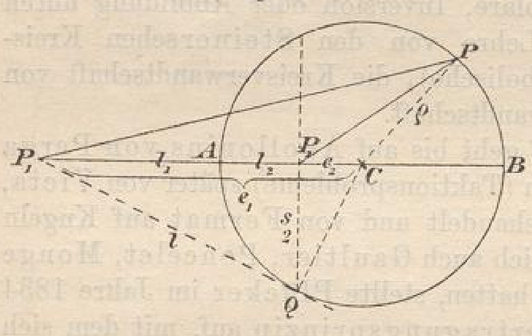
in einer Monographie dar. Auch Townsend, Hart, Casey haben sich mit diesen Lehren beschäftigt.

Es handelt sich, kurz gesagt, darum, mit Hilfe einer Transformation aus bereits gelösten Beispielen zur Geometrie und mathematischen Physik neue abzuleiten, also einen einfachen Übertragungsmechanismus an Stelle der umfangreichen Rechnungen zu setzen, über deren Schwierigkeiten man sich nach Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, unterrichten möge.

Um den Gang der Untersuchungen nicht durch mathematische Darlegungen unterbrechen zu müssen, geben wir für diejenigen Leser, denen die neueren Theorien nicht bekannt sind, einige geometrische Vorbemerkungen, verweisen aber im übrigen auf die neueren Lehrbücher (z. B. Method. Lehrbuch II).

131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel. Zu jedem Punkte P_1 aufserhalb eines Kreises giebt es auf dem zugehörigen Durchmesser einen zweiten Punkt P_2, der so liegt, dafs P_1, P_2 und die Endpunkte A und B des Durchmessers harmonische Punkte sind. Für diese gilt also, von den Vorzeichen abgesehen, die Proportion

Fig. 103.



$$P_1A : P_2A = P_1B : P_2B,$$

oder, wenn ϱ der Radius des Kreises ist und $l_1 = P_1A$, $l_2 = P_2A$, $e_1 = P_1C$, $e_2 = P_2C$ gesetzt wird

1) $$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : (e_2 + \varrho).$$

Nach Pythagoras ist ferner $CQ^2 = CP_2 \cdot CP$ (Kathetenquadrat gleich dem Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Stück derselben), also

2) $$e_1 \cdot e_2 = \varrho^2,$$

was die Inversionsbeziehungen

$$e_1 = \frac{\varrho^2}{e_2} \quad \text{und} \quad e_1 = \frac{\varrho^2}{e_1}$$

giebt, die für $\varrho = 1$ in

$$e_1 = \frac{1}{e_2} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{1}{e_1}$$

übergehen, wobei die Reciprozität am reinsten hervortritt.

Durch die Beziehung 2) geht die Proportion 1) über in

$$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : \left(\frac{\varrho^2}{e_1} + \varrho\right) = (e_1 + \varrho) : \frac{\varrho}{e_1}(\varrho + e_1) = 1 : \frac{\varrho}{e_1} = e_1 : \varrho = \varrho : e_2,$$

also

3) $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2}.$$

Verbindet man ferner einen Punkt P des Kreisumfangs mit P_1 und P_2, so ist das Verhältnis der Radiivectores p_1 und p_2 eine konstante Gröfse $\varkappa$, denn PA halbiert den Dreieckswinkel $P_1 P P_2$. Es ist also

4) $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2} = \varkappa.$$

Aus $e_1 = \varkappa\varrho$ und $e_2 = \frac{\varrho}{\varkappa}$ folgt noch durch Division $\frac{e_1}{e_2} = \varkappa^2$, so dafs man hat

5) $$\frac{e_1}{e_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{e_1^2}{\varrho^2} = \frac{\varrho^2}{e_2^2} = \varkappa^2.$$

P_2 wird gefunden mit Hilfe der von P_1 aus gezogenen Tangente $P_1 Q = t$ und des Lotes QP_2. Umgekehrt ergiebt sich aus P_2 mit Hilfe des Lotes $P_2 Q$ und der Tangente in Q der Punkt P_1. Dabei ist nach dem bekannten Sekantensatze

$$t^2 = P_1 A \cdot P_1 B = PC^2 - CQ^2 = e_1^2 - \varrho^2.$$

Setzt man das Lot $P_2 Q = \frac{s}{2}$ (halbe kürzeste Sehne durch P_2), so ist nach dem Satze über die Abschnitte der Sehnen unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$-\left(\frac{s}{2}\right)^2 = P_2 A \cdot P_2 B = \overline{P_2 C}^2 - \overline{CQ}^2 = e_2^2 - \varrho^2.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $(e^2 - \varrho^2)$ für Punkte innerhalb und aufserhalb des Kreises (also für den negativen und positiven Fall gemeinsam) als Potenz Π eines Punktes in Bezug auf den Kreis, so braucht man für den Ausdruck

$$\Pi = P_1 A \cdot P_1 B = t^2 \quad \text{bezw.} \quad \Pi = P_2 A \cdot P_2 B = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

in der Schreibweise keinen Unterschied mehr zu machen.

132) Anwendung auf das Zweipunktproblem. Man denke sich jetzt im Punkte P des Kreisumfangs eine dem Newtonschen Gesetze entsprechende Kraft $\frac{1}{p_1^2}$ in der Richtung nach P_1 hin wirkend.