Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

132) Anwendung auf das Zweipunktproblem

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Durch die Beziehung 2) geht die Proportion 1) über in

$$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : \left(\frac{\varrho^2}{e_1} + \varrho\right) = (e_1 + \varrho) : \frac{\varrho}{e_1}(\varrho + e_1) = 1 : \frac{\varrho}{e_1} = e_1 : \varrho = \varrho : e_2,$$

also

3) $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2}.$$

Verbindet man ferner einen Punkt P des Kreisumfangs mit P_1 und P_2, so ist das Verhältnis der Radiivectores p_1 und p_2 eine konstante Gröfse $\varkappa$, denn PA halbiert den Dreieckswinkel $P_1 P P_2$. Es ist also

4) $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2} = \varkappa.$$

Aus $e_1 = \varkappa \varrho$ und $e_2 = \frac{\varrho}{\varkappa}$ folgt noch durch Division $\frac{e_1}{e_2} = \varkappa^2$, so dafs man hat

5) $$\frac{e_1}{e_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{e_1^2}{\varrho^2} = \frac{\varrho^2}{e_2^2} = \varkappa^2.$$

P_2 wird gefunden mit Hilfe der von P_1 aus gezogenen Tangente $P_1 Q = t$ und des Lotes QP_2. Umgekehrt ergiebt sich aus P_2 mit Hilfe des Lotes $P_2 Q$ und der Tangente in Q der Punkt P_1. Dabei ist nach dem bekannten Sekantensatze

$$t^2 = P_1 A \cdot P_1 B = PC^2 - CQ^2 = e_1^2 - \varrho^2.$$

Setzt man das Lot $P_2 Q = \frac{s}{2}$ (halbe kürzeste Sehne durch P_2), so ist nach dem Satze über die Abschnitte der Sehnen unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$-\left(\frac{s}{2}\right)^2 = P_2 A \cdot P_2 B = \overline{P_2 C}^2 - \overline{CQ}^2 = e_2^2 - \varrho^2.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $(e^2 - \varrho^2)$ für Punkte innerhalb und aufserhalb des Kreises (also für den negativen und positiven Fall gemeinsam) als Potenz Π eines Punktes in Bezug auf den Kreis, so braucht man für den Ausdruck

$$\Pi = P_1 A \cdot P_1 B = t^2 \quad \text{bezw.} \quad \Pi = P_2 A \cdot P_2 B = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

in der Schreibweise keinen Unterschied mehr zu machen.

132) Anwendung auf das Zweipunktproblem. Man denke sich jetzt im Punkte P des Kreisumfangs eine dem Newtonschen Gesetze entsprechende Kraft $\frac{1}{p_1^2}$ in der Richtung nach P_1 hin wirkend.

Zerlegt man sie in einen horizontalen Teil h_1 und einen nach C hin gerichteten Teil q_1, so ergiebt sich mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

$$h_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{e_1}{p_1} = \frac{e_1}{p_1^3}, \qquad q_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho}{p_1^3}.$$

Macht man dasselbe mit einer in P wirkenden Kraft $\frac{1}{p_2^2}$, die aber in der Richtung P_2P, also abstoſsend im Sinne des Newton-Coulombschen Gesetzes wirkt, so wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$h_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{e_2}{p_2} = \frac{e_2}{p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1 p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1} \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3}; \; q_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho}{p_2^3} = \varrho \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3}.$$

Sollen, damit die Resultante durch C gehe und der Kreis Niveaulinie werde, die Horizontalteile einander aufheben, so müssen die Kräfte $\frac{1}{p_1^2}$ und $\frac{1}{p_2^2}$ in bestimmtem Verhältnisse stehen. Setzt man z. B. die eine wieder gleich $\frac{1}{p_1^2}$, die andere aber gleich $\frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{1}{p_2^2}$, dann wird der eine Horizontalteil

$$h_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{e_1}{p_1^3},$$

also, da die Richtung entgegengesetzt ist, gleich $-h_1$. Dabei wird

$$q_1 = \frac{\varrho}{p_1^3} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3},$$

also unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$q_1 + q_2 = \frac{\varrho}{p_1^3} - \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{\varrho^2 - e_1^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}.$$

Nun ist aber

$$-\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\frac{\varrho^4}{e_2^2} - \varrho^2}{\varrho \cdot \frac{p_2^3 \varrho^3}{e_2^3}} = -\frac{\varrho^2}{e_2^2}\left(\varrho^2 - e_2^2\right) \cdot \frac{e_2^3}{p_2^3 \varrho^4} = -\frac{\varrho^2 - e_2^2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2} = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Also auch

$$q_1 + q_2 = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Sind P_1 und P_2, also auch Π_1 und Π_2 und auſserdem ϱ fest gegeben, so ist p_1 bezw. p_2 die einzige veränderliche Gröſse, die der Lage von P auf dem Kreise entspricht. Die Resultante $q_1 + q_2$

ist also unter den gegebenen Voraussetzungen umgekehrt proportional der dritten Potenz von p_1 bezw. p_2.

In elektrostatischer Hinsicht hat man also folgendes:

Läſst man in einem Punkte P_1 auſserhalb des gegebenen Kreises die elektrische Ladung $+1$, in dem zugeordneten harmonischen Punkte P_2 die Ladung $-\frac{\varrho}{e_1}$ wirken, so geht die Resultante für jeden Kreispunkt durch den Punkt C, d. h. der Kreis ist eine Niveaulinie des Potentials. Ladet man den auf dem Kreisumfange beliebig liegenden und dort beweglichen Punkt P mit der Elektrizität $+1$ oder -1, so wird für jede Lage die Resultante gleich

$$\mp\frac{e_1^2-\varrho^2}{\varrho p_1^3}=\mp\frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}$$

oder, was dasselbe ist, gleich

$$\pm\frac{e_2-\varrho^2}{p_2^3}\cdot\frac{e_2}{\varrho^2}=\pm\frac{e_2\,\Pi_2}{\varrho^2 p_2^3},$$

d. h. umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung p_1 bezw. p_2. Bei Ladung E bezw. $-E\frac{\varrho}{e_1}$ ist die Resultante das E-fache.

Dadurch bestätigen sich die Resultate des Abschnitts 97, von denen man ohne weiteres hätte ausgehen können, zugleich aber ist die dritte Potenz der Entfernungen als maſsgebend nachgewiesen, die schon bei dem Störungsproblem unter Nr. 35 als wichtig hingestellt worden war.

Man denke sich nun den Kreis um AB rotierend, ebenso die in Nr. 97 behandelten Kraft- und Niveaulinien des Zweipunktproblems für ungleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten, die sich wie $e_1 : \varrho$ verhalten. Die Niveauflächen des Problems haben dann die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1}-\frac{\varrho}{r_2}=c,$$

eine davon hat die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1}-\frac{\varrho}{r_2}=0,$$

woraus $\frac{r_1}{r_2}=\frac{e_1}{\varrho}$ folgt, so daſs es sich um die soeben besprochene Kugel handelt. Denkt man sich die gleichwertigen Kraftröhren konstruiert, die nach Nr. 97 von P_1 aus zum Teil nach P_2, zum Teil nach dem unendlichen Bereiche gehen, so wird die Kugelfläche in gleichwertige Felder eingeteilt, so dafs für sämtliche $p \cdot F$ konstant ist, wenn p die Resultante der beiden Kräfte, F die Fläche eines kleinen Feldes bedeutet. Die Kraftresultanten also verhalten sich umgekehrt, wie die Felderflächen, sie verhalten sich aber nach obigem auch umgekehrt, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 und P_2, folglich hat man den Satz:

Die gleichnamigen Kraftröhren des Zweipunktproblems teilen die dabei vorkommende Kugelfläche in Felder ein, deren Flächen sich verhalten, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 oder P_2.

Angenommen nun, auf der Kugelfläche ordnete sich aus irgend welchen Gründen Influenzelektrizität denselben Resultanten entsprechend an, so würde dies nach Poisson mit der Dichtigkeit $\delta = \frac{p}{4\pi}$ geschehen, d. h. proportional den Kraftresultanten, und daher umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Fntfernungen von P_1 und P_2 und umgekehrt proportional diesen Felderflächen.

Diese Voraussetzung trifft nun ein bei folgenden Influenzproblemen:

133) **Aufgabe.** Eine leitende Kugel stehe durch einen Draht mit der Erde in Verbindung, in der Entfernung e vom Mittelpunkte befinde sich im Aufsenraume ein Punkt mit der elektrischen Ladung $+E$. Wie grofs ist die Menge der Influenzelektrizität erster Art, und wie ordnet sie sich an?

Auflösung. Durch die Verbindung mit der Erde wird erreicht, dafs nach vollendeter Scheidung im ganzen Leiter ebenso, wie in der Erde, das Potential Null herrscht. Die gesamte Influenzelektrizität $-E_1$ erster Art hat sich infolge der gegenseitigen Abstofsungen ihrer Teilchen auf der Kugeloberfläche angeordnet, aber infolge der Anziehung durch die Ladung E unregelmäfsig, d. h. dichter auf der dem Punkte E zugekehrten, weniger dicht auf der ihm abgewendeten Seite. Die Sätze über die homogene Kugelschale finden also hier keine Anwendung, das Potential der Belegung allein ist also für den Innenraum nicht konstant. Es wird sich aber ein einfaches Gesetz ergeben.

Jedes elektrische Teilchen $-\varepsilon$ der Influenzelektrizität hat für den Mittelpunkt C der Kugel das Potential $\frac{-\varepsilon}{\varrho}$, die gesamte Influenzelektrizität hat also dort den Potentialwert

$$\sum \frac{-\varepsilon}{\varrho} = \frac{-E_1}{\varrho}.$$