Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

136) Centrobarischer Charakter der Belegung

ladet und die Kugelschale mit der Erde in Berührung setzt, nur sammelt sich dann die Influenzelektrizität nicht auf der Aufsenseite der Schale, sondern auf der Innenseite an. Der Gang der Betrachtung ist derselbe. Das Potential nach aufsen wird gleich Null, so dafs die Wirkungen von E_2 und der Belegung einander aufheben. Für gröfsere Entfernungen ist die Anordnung gleichgültig (Schwerpunkt), da aber die Wirkung gleich Null ist, mufs es sich um gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten handeln. Dies stimmt mit der vorigen Betrachtung überein. Es handelt sich also gewissermafsen um den Innenteil des Zweipunktproblems.

136) Centrobarischer Charakter der Belegung. Haben nun die Kraftlinien irgend einer Masse Asymptoten, so gehen diese nach Nr. 95 durch den Schwerpunkt der Masse. Hier sind die geraden Linien ihre eigenen Asymptoten, folglich ist P_2 der Schwerpunkt der so verteilten Masse (vgl. Nr. 131). Daraus ergiebt sich für die Mechanik folgendes bemerkenswerte Resultat:

Ordnet man auf einer Kugelfläche Masse so an, dafs ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional zur Entfernung von einem inneren Punkte P_2 (oder seinem zugeordneten äufseren Punkte P_1) wird, so ist P_2 der Schwerpunkt der Masse. Attraktionscentrum und Schwerpunkt fallen also zusammen. Die Belegung ist centrobarisch.

Ein äufserer Punkt wird also so angezogen, dafs er frei fallend sich geradlinig nach P_2 hinbewegt. Wie in Nr. 11 bezw. 18 wird das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve, das Potentialdiagramm durch die gleichseitige Hyperbel dargestellt. Wird der Punkt nach irgend welcher Richtung hin geworfen, so tritt dieselbe Erscheinung ein, wie bei den Planetenbewegungen um die Sonne P_2, d. h. er bewegt sich auf einem Kegelschnitte, dessen einer Brennpunkt nach P_2 fällt.

Ein innerer Punkt verhält sich ebenso, nur ist für ihn P_1 der mafsgebende Anziehungspunkt.

Man kann sich nun unendlich viele Kugeln denken, die in Bezug auf P_1 und P_2 das Gesetz $\frac{p_1}{p_2} = c$ befolgen, so dafs man den ganzen Innenraum der ersten Kugel ausfüllt. Ist auf jeder Fläche die Massenbelegung proportional dem Werte $\frac{1}{p_2^3}$, so ist die Sache dieselbe. Nur mufs man jetzt, da die excentrischen Kugeln auf der P_1 zugewandten Seite dichter aneinander liegen, als auf der andern, den Fehler vermeiden, von der Dichte der Flächenbelegung auf die der räumlichen

Ausfüllung zu schliefsen. Unten wird sich zeigen, dafs die räumliche Dichtigkeit proportional der Gröfse $\frac{1}{p_2^5}$ wird.

137) Sonderfall der Ebene. Nähert man den influenzierenden Punkt P_1 einer unendlich grofsen leitenden (und abgeleiten) Kugelschale, d. h. einer unbegrenzten Ebene, so wird P_2 das wirkliche Spiegelbild von P_1, und die Menge der Influenzelektrizität wird gleich $E_1 = E\frac{\varrho}{e_1}$. Hier ist $\varrho = e_1 - l_1$, also

$$E_1 = E\frac{\varrho}{\varrho + l_1} = E\frac{1}{1+\frac{l_1}{\varrho}},$$

also für

$$\varrho = \infty, \quad E_1 = E,$$

d. h. die beiden Mengen sind einander gleich. Dies war selbstverständlich, denn P_1 durfte auch als innerer Punkt der unendlich grofsen Kugel angesehen werden. Diese elektrische Menge ist so auf der Kugel zu verteilen, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2 wird. Diese Entfernung ist jetzt

$$p_1 = \sqrt{l_1^2 + z^2},$$

wo z die Entfernung von der Geraden $P_1 P_2$ ist.

Um die Dichte zu berechnen, kann man den Normalteil der Kraft $\frac{E}{p_1^2}$ bilden, d. h.

$$\frac{E}{p_1^2} \cdot \cos\alpha = \frac{E}{p_1^2}\frac{l_1}{p_1} = \frac{E l_1}{p_1^3}.$$

Dazu kommt die abstofsende Einwirkung der Influenzelektrizität auf ihre eigenen Teilchen, die so ist, als ob dieselbe elektrische Masse in P_2 angebracht wäre. Dies giebt einen gleichgerichteten Normalteil von derselben Gröfse, so dafs die Normalkraft gleich $\frac{2 E l_1}{p_1^3}$ ist, während die andern Teile einander aufheben, so dafs Gleichgewicht stattfindet. Die Dichtigkeit wird also jetzt

$$\delta = \frac{2 E l_1}{4\pi p_1^3} = \frac{E l_1}{2\pi p_1^3} = \frac{E l_1}{2\pi\left(l_1^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies hätte sich auch aus dem früheren Resultate

$$\delta = E \cdot \frac{e_1^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{(\varrho + l_1)^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{2\varrho l^1 + l_1^2}{4\pi\varrho p_1^3}$$