Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

137) Sonderfall der Ebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Ausfüllung zu schliefsen. Unten wird sich zeigen, dafs die räumliche Dichtigkeit proportional der Gröfse $\frac{1}{p_2^5}$ wird.

137) Sonderfall der Ebene. Nähert man den influenzierenden Punkt P_1 einer unendlich grofsen leitenden (und abgeleiten) Kugelschale, d. h. einer unbegrenzten Ebene, so wird P_2 das wirkliche Spiegelbild von P_1, und die Menge der Influenzelektrizität wird gleich $E_1 = E\frac{\varrho}{e_1}$. Hier ist $\varrho = e_1 - l_1$, also

$$E_1 = E\frac{\varrho}{\varrho + l_1} = E\frac{1}{1+\frac{l_1}{\varrho}},$$

also für

$$\varrho = \infty, \quad E_1 = E,$$

d. h. die beiden Mengen sind einander gleich. Dies war selbstverständlich, denn P_1 durfte auch als innerer Punkt der unendlich grofsen Kugel angesehen werden. Diese elektrische Menge ist so auf der Kugel zu verteilen, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2 wird. Diese Entfernung ist jetzt

$$p_1 = \sqrt{l_1^2 + z^2},$$

wo z die Entfernung von der Geraden $P_1 P_2$ ist.

Um die Dichte zu berechnen, kann man den Normalteil der Kraft $\frac{E}{p_1^2}$ bilden, d. h.

$$\frac{E}{p_1^2}\cdot\cos\alpha = \frac{E\,l_1}{p_1^2\,p_1} = \frac{El_1}{p_1^3}.$$

Dazu kommt die abstofsende Einwirkung der Influenzelektrizität auf ihre eigenen Teilchen, die so ist, als ob dieselbe elektrische Masse in P_2 angebracht wäre. Dies giebt einen gleichgerichteten Normalteil von derselben Gröfse, so dafs die Normalkraft gleich $\frac{2\,El_1}{p_1^3}$ ist, während die andern Teile einander aufheben, so dafs Gleichgewicht stattfindet. Die Dichtigkeit wird also jetzt

$$\delta = \frac{2\,El_1}{4\,\pi p_1^3} = \frac{El_1}{2\,\pi p_1^3} = \frac{El_1}{2\,\pi\left(l_1^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies hätte sich auch aus dem früheren Resultate

$$\delta = E\cdot\frac{e_1^2 - \varrho^2}{4\,\pi\varrho p_1^3} = E\frac{(\varrho + l_1)^2 - \varrho^2}{4\,\pi\varrho p_1^3} = E\frac{2\,\varrho l^1 + l_1^2}{4\,\pi\varrho p_1^3}$$

ableiten lassen, was für $\varrho = \infty$ sich auf dasselbe reduziert. Dadurch ist eine wesentliche Ergänzung zur Theorie des symmetrischen Zweipunktproblems für gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten gegeben, dessen einer Punkt sich durch die so belegte Ebene ersetzen läfst. Die Felder der Ebene sind dabei proportional den dritten Potenzen der Entfernung von P_1.

[Die Bestätigung der Richtigkeit des Resultates läfst sich auf folgendem Wege elementar erreichen. Man errichte auf der Ebene in jeder Entfernung $r = z$ von der Linie $P_1 P_2$ Lote von der Höhe

$$y = \frac{E l_1}{2\pi [l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

so dafs der Mantel des zugehörigen Cylinders mit $P_1 P_2$ als Achse das $2 r\pi$fache wird, nämlich $E l_1 \dfrac{r}{[l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}}$. Um den Inhalt des so entstehenden Diagrammkörpers ohne höhere Rechnung zu finden, entwickelt man in

$$\left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{3}{2}} = l_1^3 \left[1 + \left(\frac{r}{l_1}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

die Klammer mit Hilfe des binomischen Satzes in einer Reihe. Die Glieder derselben sind mit r zu multiplizieren und dann der Schichtenformel zu unterwerfen (Summenformel). Fügt man in der entsprechenden Klammer $+1$ und -1 hinzu, und multipliziert man mit l_1^2, so ergiebt sich im wesentlichen $1 - \left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Das Endresultat giebt als Elektrizitätsmenge E, wie oben verlangt war.]

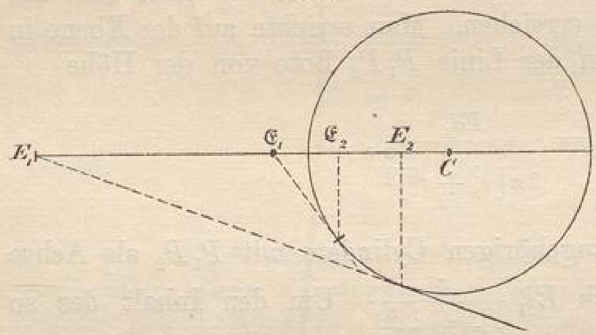
Bemerkenswert ist, dafs eine mit ponderabler Masse nach diesem Gesetz belegte Ebene auf beiden Seiten ebenso anziehend wirkt, wie der gleich stark geladene Punkt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene. Die Kraftlinien sind also Strahlen durch diesen Punkt, die Niveauflächen koncentrische Kreise. Von der Freifallbewegung gilt das oben Gesagte, ebenso von den in Kegelschnittbahnen erfolgenden Wurfbewegungen.

Symmetrie und Reciprozität werden so zu einem Hebel der mathematischen Physik. Zugleich erkennt man wiederum, dafs ein Anziehungsproblem vollständig bestimmt ist, sobald man zwei seiner Niveauflächen kennt, dafs z. B. bei Punktproblemen die Punkte durch Niveauflächen von bestimmter Belegung ersetzt werden können. (Vgl. Nr. 128.)

Zur Übung kann man Probleme mit mehreren influenzierenden Punkten, die sich elementar angreifen lassen, behandeln; z. B. das folgende:

138) **Aufgabe.** Zwei gleichartig geladene Punkte aufserhalb einer leitenden Kugel, die auf der Verlängerung eines Durchmessers liegen, wirken unter Ableitung der letzteren nach der Erde influenzierend. Menge und Anordnung der Elektrizität sind zu untersuchen.

Fig. 104.



E_1 und $\mathfrak{E}_1$ seien die geladenen Punkte und zugleich die Elektrizitätsmengen der Ladung, E_2 und $\mathfrak{E}_2$ seien die Inversionsbilder mit den Ladungen

$$E_2 = -E_1 \frac{\varrho}{e_1}, \quad \mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}_1 \frac{\varrho}{\mathfrak{e}_1}.$$

Das Problem dieser 4 Punkte ist nach Nr. 100 zu behandeln und giebt unter den Niveauflächen

$$1) \qquad \frac{E_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{r}_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{r}_2} = c$$

die gegebene Kugel, die dem Potentialwerte Null entspricht. Die Kraftlinien des Problems sind von der Gleichung

$$2) \qquad E_1 \cos \vartheta_1 + \mathfrak{E}_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \vartheta_2 + \mathfrak{E}_2 \cos \delta_2 = c.$$

Beide Scharen sind zugleich die des Hauptproblems.

Ist für irgend einen Punkt der Kugel p die durch C gehende Resultante, also

$$p = E_1 \frac{\Pi_1}{\varrho r_1^3} + \mathfrak{E}_1 \frac{\mathfrak{P}}{\varrho \mathfrak{r}_1^3},$$

so ist $\frac{p}{4\pi}$ die Dichte der Influenzelektrizität in jedem Punkte, ihre Menge ist $E_2 + \mathfrak{E}_2$. Die Flächen $p = c$ geben mit der Kugel Schnittlinien, auf denen die Dichte konstant ist.

In entsprechender Weise sind beliebig viele und beliebig liegende Konduktoren zu behandeln. Die Belegung allein, ponderabel gedacht, wirkt nach aufsen wie die Punkte E_2 und $\mathfrak{E}_2$, nach innen wie die Punkte E_1 und $\mathfrak{E}_1$ mit ihren Ladungen. Der Schwerpunkt von E_2 und $\mathfrak{E}_2$ ist der Schwerpunkt der Belegung.