Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

140) Inversionsbeziehungen bei elektrischen Bildern

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

139) Elektrische Bilder.

Thomson, dem man diese Theorie verdankt, hat durch die Inversion zu gegebenen Punkte zu findende Punkte mit ihren elektrischen Ladungen die elektrischen Bilder der ersteren und ihrer Ladungen genannt. Der Name ist um so treffender, als es sich für den Fall der Ebene um wirkliche Spiegelbilder handelt. Der Begriff des elektrischen Bildes umfafst also erstens die Lage, zweitens die Ladung. Auch eine homogene Masse hat ein elektrisches Bild in Bezug auf jede Kugel, die Abbildung aber wird nicht homogen, weil die einzelnen Punkte verschiedene Ladungen erhalten, die Dichtigkeit also veränderlich wird. Man mufs also lernen, nicht nur Punkte, Linien, Flächen und Körper, sondern auch Dichtigkeiten und Potentialwerte zu übertragen. Kann man dies, so lassen sich aus gelösten Problemen neue ableiten. Dies soll jetzt gelehrt werden.

140) Inversionsbeziehungen bei elektrischen Bildern.

a) A_1 und B_1 seien die Abbildungen von A und B mit Hilfe der Inversion durch den mit Radius ϱ um O gelegten Kreis. Aus

$$OA \cdot OA_1 = \varrho^2$$

und

$$OB \cdot OB_1 = \varrho^2$$

folgt

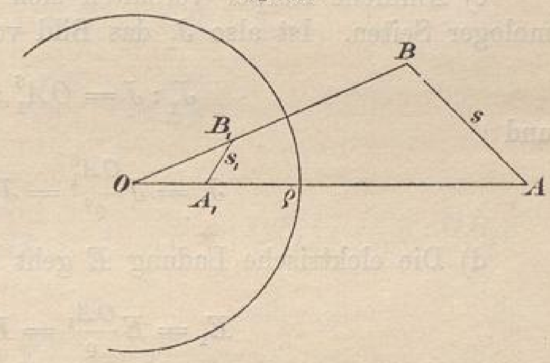
$$OA : OB = OB_1 : OA_1$$

und damit die Ähnlicheit der Dreiecke OAB und OB_1A_1. Demnach ist

$$AB : A_1B_1 = OA : OB_1$$

oder, da $OB_1 = \frac{\varrho^2}{OB}$ ist,

Fig. 105.



$$AB : A_1B_1 = OA : \frac{\varrho^2}{OB} = OA \cdot OB : \varrho^2 = \frac{\varrho^2}{OA_1} : OB_1 = \varrho^2 : OA_1 \cdot OB_1.$$

Ist nun der Winkel α unendlich kein, also auch $AB = s$ und $A_1B_1 = s_1$ unendlich klein, so sind auch die Unterschiede zwischen OA_1 und OB_1, ebenso die zwischen OA und OB unendlich klein, man darf also dann statt $OA \cdot OB$ setzen OA^2, statt $OA_1 \cdot OB_1$ ebenso OA_1^2.

Wie also auch ein kleines Element s einer Geraden oder einer Kurve gerichtet sei, stets gilt für dieses und sein Inversionsbild die Proportion

$$s : s_1 = OA^2 : \varrho^2 = \varrho^2 : OA_1^2.$$

Ein kleines von A ausgehendes Linien- oder Bogenelement giebt demnach als Inversionsbild ein Element

$$s_1 = s \cdot \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \cdot \frac{OA_1^2}{\varrho^2}.$$

(Für gröfseren Winkel α gilt diese Beziehung nicht, denn für solche ist $s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1$.)

Daraus läfst sich der isogonale Charakter und die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen bei dieser Übertragung ableiten. Ein kleines Dreieck mit den Seiten s, t, u geht in ein solches mit den Seiten

$$s_1 = s\frac{\varrho^2}{OA^2}, \quad t_1 = t\frac{\varrho^2}{OA^2}, \quad u_1 = u\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

über. Die Ähnlichkeit ist also nachgewiesen.

b) Ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten. Ist also die kleine Fläche F_1 das Inversionsbild von F, so ist $F_1 : F = OA_1^4 : \varrho^4$, d. h.

$$F_1 = F \cdot \frac{OA_1^4}{\varrho^4} = F\frac{\varrho^4}{OA^4}.$$

c) Ähnliche Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Seiten. Ist also J_1 das Bild von J, so ist

$$J_1 : J = OA_1^6 : \varrho^6$$

und

$$J_1 = J\frac{OA_1^6}{\varrho^6} = J\frac{\varrho^6}{OA^6}.$$

d) Die elektrische Ladung E geht über in

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA}.$$

Der Beweis ist oben gegeben.

e) Aus

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA} \quad \text{und} \quad s_1 = s\frac{OA_1^2}{\varrho^2} = s\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

folgt durch Division

$$\frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s}\frac{\varrho}{OA_1} = \frac{E}{s}\frac{OA}{\varrho}.$$

Nun ist aber die Dichte der elektrischen oder ponderablen Belegung eines Linienelements

$$\delta_1 = \frac{E_1}{s_1} \quad \text{bezw.} \quad \delta = \frac{E}{s}.$$

Das Bild der Belegung δ eines Linienelements also ist

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho}{OA_1} = \delta \frac{OA}{\varrho}.$$

f) Dieselbe Betrachtung für die Belegung eines Flächenelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^3}{OA_1^3} = \delta \frac{OA^3}{\varrho^3}.$$

g) Dieselbe für die Belegung eines Körperelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^5}{OA_1^5} = \delta \frac{OA^5}{\varrho^5}.$$

h) Auch Potentialwerte lassen sich durch Abbildung übertragen. Befindet sich z. B. in A die Ladung E, deren Potentialwert in B gleich $V = \frac{E}{s}$ ist, so giebt die Abbildung in A_1 die Ladung

$$E_1 = E \frac{\varrho}{OA} = E \frac{OA_1}{\varrho},$$

deren Potential in B_1 den Wert $V_1 = \frac{E_1}{s_1}$ hat. Für gröfsern Winkel α gilt aber die Proportion

$$s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1,$$

d. h. es ist

$$s_1 = s \frac{OB_1}{OA} = s \frac{OA_1}{OB}.$$

Es ist also

$$V : V_1 = \frac{E}{s} : \frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s} : \frac{E \frac{\varrho}{OA}}{s \frac{OB_1}{OA}} = 1 : \frac{\varrho}{OB_1} = OB_1 : \varrho = \varrho : OB,$$

also

$$V_1 = V \frac{OB}{\varrho} = V \frac{\varrho}{OB_1}.$$

Das Verhältnis der Potentiale ist also unabhängig von der Lage des geladenen Punktes, dagegen abhängig von der Lage des Punktes, für den der Potentialwert genommen ist und vom Inversionsradius. Demnach gilt das Gesagte auch von mehreren Ladungen.

Hat man z. B. drei Ladungen, deren Potentialwerte für B die Summe $U + V + W$ geben, so findet man für den Bildpunkt B_1 den Potentialwert der abgebildeten Ladungen als

$$U_1 + V_1 + W_1 = (U + V + W) \frac{OB}{\varrho} = (U + V + W) \frac{\varrho}{OB_1}.$$

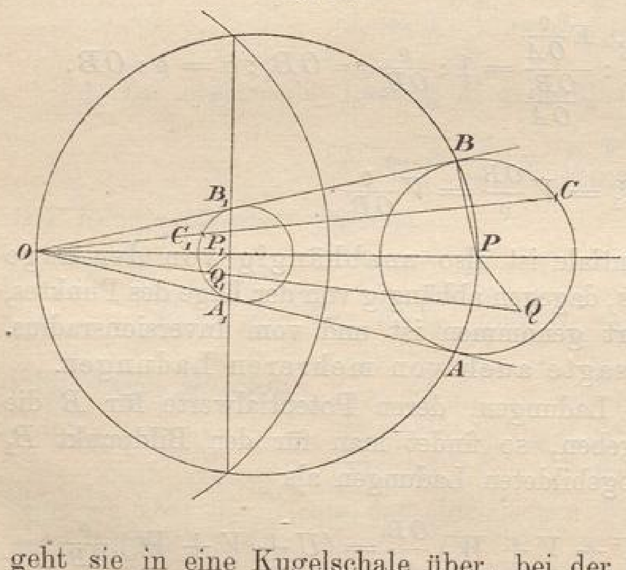
Als bekannt werde nun vorausgesetzt (vgl. Meth. Lehrbuch II, Stereom. Kap. IX), daſs durch Inversion Kugeln wieder in Kugeln übergehen, wobei die Schnittwinkel zweier Kugeln erhalten bleiben, so daſs z. B. eine Kugel, die die Inversionskugel rechtwinklig schneidet, in sich selbst übergeht. Ebenen gehen in Kugeln über, die durch das Inversionscentrum gehen, Kugeln durch letzteres verwandeln sich in Ebenen. Das Inversionscentrum ist äuſserer Ähnlichkeitspunkt der Kugel und ihrer Bildkugel, woraus sich harmonische Beziehungen ergeben. Die Rechteckteilung des Raums durch koncentrische Kugeln, Meridianebenen und Kugelflächen geht über in eine solche durch excentrische Kugeln, die ein Kugelbüschel durch einen Kreis orthogonal schneiden und in eine dritte Orthogonalschar von Flächen, die gewissermaſsen als Kegel mit kreisförmig gebogenen Seiten betrachtet werden können. Alle diese Beziehungen lassen sich elementar entwickeln, wozu man besonders Möbius und Reye vergleiche. Vorbeugend sei bemerkt, daſs im Raum die Niveauflächen eines Problems nicht in solche des Inversions-Problems übergehen. In der Ebene dagegen findet dies statt.

141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen.

Unter den zahlreichen physikalischen Sätzen, die sich aus obigem ableiten lassen, ist folgender von besonderer Wichtigkeit:

Haben mehrere Niveauflächen desselben Anziehungsproblems Belegungen, deren Potentiale nach auſsen hin (oder nach innen hin) überall gleichwertig sind, so haben auch ihre Bilder Potentiale von dieser Eigenschaft.

Fig. 106.



Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat nach auſsen hin dasselbe Potential, wie ihr gleich stark geladener Mittelpunkt. Durch Abbildung mittels eines um einen äuſseren Punkt geschlagenen Kreises geht sie in eine Kugelschale über, bei der nach Nr. 139 die Dichte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung (z. B.