Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen durch Inversion

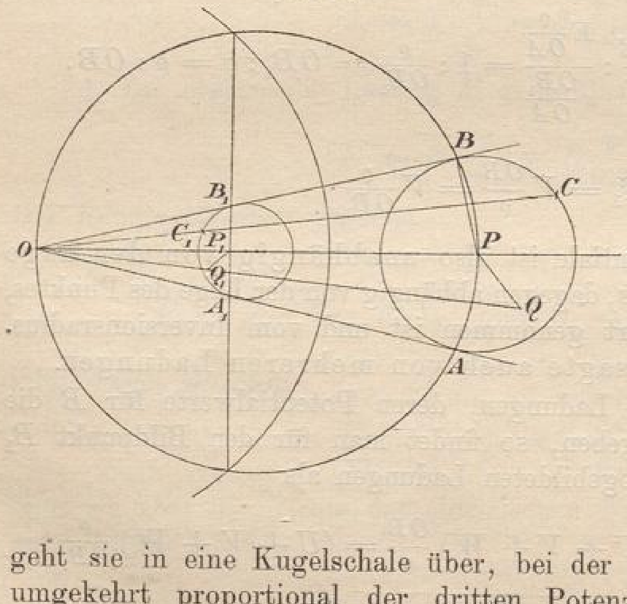
Als bekannt werde nun vorausgesetzt (vgl. Meth. Lehrbuch II, Stereom. Kap. IX), dafs durch Inversion Kugeln wieder in Kugeln übergehen, wobei die Schnittwinkel zweier Kugeln erhalten bleiben, so dafs z. B. eine Kugel, die die Inversionskugel rechtwinklig schneidet, in sich selbst übergeht. Ebenen gehen in Kugeln über, die durch das Inversionscentrum gehen, Kugeln durch letzteres verwandeln sich in Ebenen. Das Inversionscentrum ist äufserer Ähnlichkeitspunkt der Kugel und ihrer Bildkugel, woraus sich harmonische Beziehungen ergeben. Die Rechteckteilung des Raums durch koncentrische Kugeln, Meridianebenen und Kugelflächen geht über in eine solche durch excentrische Kugeln, die ein Kugelbüschel durch einen Kreis orthogonal schneiden und in eine dritte Orthogonalschar von Flächen, die gewissermafsen als Kegel mit kreisförmig gebogenen Seiten betrachtet werden können. Alle diese Beziehungen lassen sich elementar entwickeln, wozu man besonders Möbius und Reye vergleiche. Vorbeugend sei bemerkt, dafs im Raum die Niveauflächen eines Problems nicht in solche des Inversions-Problems übergehen. In der Ebene dagegen findet dies statt.

141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen.

Unter den zahlreichen physikalischen Sätzen, die sich aus obigem ableiten lassen, ist folgender von besonderer Wichtigkeit:

Haben mehrere Niveauflächen desselben Anziehungsproblems Belegungen, deren Potentiale nach aufsen hin (oder nach innen hin) überall gleichwertig sind, so haben auch ihre Bilder Potentiale von dieser Eigenschaft.

Fig. 106.



Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie ihr gleich stark geladener Mittelpunkt. Durch Abbildung mittels eines um einen äufseren Punkt geschlagenen Kreises geht sie in eine Kugelschale über, bei der nach Nr. 139 die Dichte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung (z. B.

OA_1^3, OB_1^3, OC_1^3) ist. Da der Kreis durch den Mittelpunkt P, durch O und mit OP als Durchmesser (also durch A und B) in die Gerade $A_1 B_1$ übergeht, d. h. in die Berührungssehne, ist P_1 der O zugeordnete Punkt. Die Ladung von P_1 wird nach d)

$$m_1 = m \frac{\varrho}{OP}.$$

Die Belegung der neuen Kugel und die Ladung des Punktes P_1 haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Die Potentialwerte für gröfsere Entfernungen stimmen überein, also müssen beide Belegungen gleich $m \frac{\varrho}{OP}$ sein.

So ergiebt sich das schon in Nr. 132 behandelte Problem in äufserst einfacher Weise.

Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat im Innern überall den Potentialwert $V = \frac{m}{r}$, z. B. auch im beliebig liegenden Punkte Q, der in Q_1 übergeht. Nach h) wird

$$V_1 = V \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{r} \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{OQ_1} \cdot \frac{\varrho}{r},$$

also umgekehrt proportional OQ_1. Nun ist aber nach vorigem Beispiel die Belegung

$$m_1 = m \cdot \frac{\varrho}{OP} = m \frac{OP_1}{\varrho},$$

also ist

$$V_1 = \frac{m}{OQ} \cdot \frac{\varrho}{r} = \frac{m_1 \cdot OP}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{1}{OQ_1} = \frac{1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot m_1}{r}.$$

Aus $r : r_1 = OP : M_1$ folgt

$$r = r_1 \frac{OP}{OM_1},$$

demnach wird

$$V_1 = \frac{m_1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot OM_1}{r_1 OP} = \frac{m_1 \frac{OM_1}{r_1}}{OQ_1},$$

oder, wenn man $m_1 \frac{OM_1}{r_1} = m_0$ setzt,

$$V_1 = \frac{m_0}{OQ_1},$$

d. h. gleich dem Potential einer in O angebrachten Masse m_0, die zu m_1 in dem früher dargelegten Verhältnisse steht. Also auch hier bestätigt sich alles früher Abgeleitete.

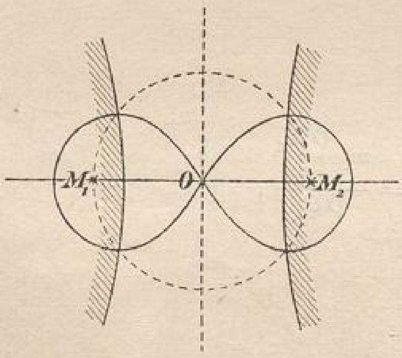
Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man einen Inversionskreis wählt, der die Kugel auf sich selbst abbildet, indem er sie rechtwinklig schneidet.

Beispiel. Koncentrische, homogen mit derselben Masse belegte Kugelschalen haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Folglich: Kreise einer sogenannten Kreisschar, die mit gleichen Massen so belegt sind, dafs auf jeder die Dichtigkeiten umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung von einem der Büschelpunkte sind, haben nach aufsen hin dasselbe Potential.

Beispiel. Die homogen mit Masse ausgefüllte Vollkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie der mit derselben Masse belegte Mittelpunkt. Nach 139 geht sie durch Abbildung in eine Kugel über, deren Dichtigkeit im Innern umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung vom Inversionscentrum oder von dessen zugeordnetem Punkte in der Bildkugel ist. Das Potential nach aufsen ist überall gleich dem einer im letzteren Punkte befindlichen Masse, deren Gröfse $m \cdot \frac{\varrho}{OM}$ gleich der der Bildmasse ist. Damit ist die Ergänzung zu Nr. 135 gegeben.

Die koncentrische homogen erfüllte Hohlkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie die gleiche Masse im Centrum. Sie geht in eine excentrische Hohlkugel des vorigen Dichtigkeitsgesetzes über, für deren Büschelpunkte dasselbe gilt. Das Potential im Hohlraum der ersteren ist konstant, das der letzteren ergiebt sich mit bei der Schale als gleich dem des äufseren Büschelpunktes mit einer leicht zu bestimmenden Ladung. Der innere Büschelpunkt ist nach dem Asymptotengesetz der Schwerpunkt der so mit Masse erfüllten Kugel.

Fig. 107.



Beispiel. Jede Niveaufläche des symmetrischen Zweipunktsystems für gleichartige Ladungen hat bei der früher ermittelten Belegung nach aufsen hin dieselbe Potentialwirkung, wie die Punkte M_1 und M_2. Man bilde mittels des um O gelegten, durch M_1 und M_2 gehenden Kreises ab, dann gehen M_1 und M_2 in sich selbst über, die Niveaufläche geht in ihre reciproke Fläche mit einer ganz bestimmten Belegung über, z. B. bei der durch O gehenden Niveaufläche in eine asymptotische Drehungsfläche, deren Gleichung leicht aus der ersteren abzuleiten ist. Die Punkte des Aufsenraumes der ursprünglichen Niveaufläche gehen in die des nicht schraffierten Raumes über. Dort sind also die Niveauflächen und Stromlinien der neuen Belegung ebenfalls identisch mit denen von M_1 und M_2. Daraus lassen sich weitere Schlüsse über das Zweipunktproblem ziehen, da sich für die reciproken Punkte eine einfache Beziehung herausstellt. — Entsprechendes gilt von jeder Anordnung geladener Punkte auf dem Kreise oder auf der Kugel.

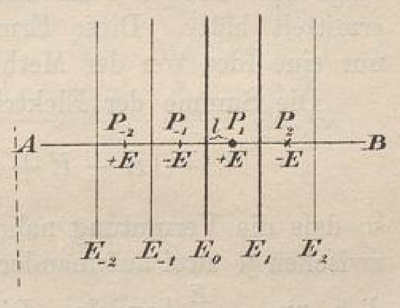
Obwohl im allgemeinen Niveauflächen nicht wieder in Niveauflächen übergehen, lassen sich in der genannten Weise aus gelösten Problemen neue ableiten, und dazu ließen sich noch zahlreiche Beispiele geben.

142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen. Thomson hat aber auch Beispiele behandelt, bei denen mehrfache Spiegelung vorkommt. Auch diese bedeutungsvolle Ergänzung seiner Methode soll an einfachen Beispielen verdeutlicht werden, bei denen es sich um Influenzerscheinungen auf mehreren Flächen zugleich handelt.

Aufgabe. In der Mitte zwischen zwei unbegrenzten Parallelebenen E_0 und E_1 befinde sich ein Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Dieser rufe auf jeder der leitenden Ebenen Influenz hervor, die beiden negativen Influenzelektrizitäten aber beeinflussen sich gegenseitig. Die elektrische Dichtigkeit für beliebig liegende Punkte der beiden Ebenen soll untersucht werden.

Auflösung. Man spiegele P_1 und die Ebene E_1 gegen die Ebene E_0, was P_{-1} mit der Ladung $-E$ und die Ebene E_{-1} giebt. Alles jetzt Vorhandene spiegele man gegen die Ebene E_1, das neu Erhaltene gegen E_0, das jetzt Neue gegen E_0 u. s. w. So erhält man auf der Geraden AB unendlich viele Punkte in gleichen Abständen $2l$ mit wechselnden Ladungen $+E$ und $-E$ und dazwischen entsprechende Ebenen. Jede der Ebenen ist Symmetrieebene des Problems der so geladenen Punkte. Die Punkte rechts und links von E_0 z. B. bringen auf der Ebene eine Influenzverteilung hervor, die identisch mit der auf E_1 hervorgebrachten ist. Entfernt man jetzt alles, was rechts und links von E_1 liegt, so hat man die Lösung des Problems. Denn durch die entsprechende Belegung beider Ebenen ist alles Außenliegende ersetzt worden.

Fig. 108.



Nach Nr. 136 geben die Punkte P_1 und P_{-1} zusammen der Ebene E_0 in einem beliebigen Punkte die elektrische Dichtigkeit