Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen

flächen und Stromlinien der neuen Belegung ebenfalls identisch mit denen von M_1 und M_2. Daraus lassen sich weitere Schlüsse über das Zweipunktproblem ziehen, da sich für die reciproken Punkte eine einfache Beziehung herausstellt. — Entsprechendes gilt von jeder Anordnung geladener Punkte auf dem Kreise oder auf der Kugel.

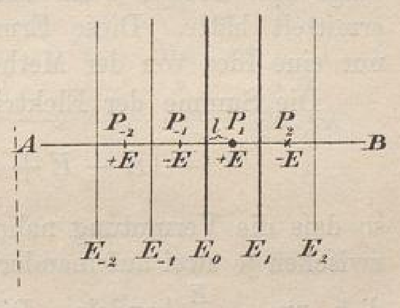
Obwohl im allgemeinen Niveauflächen nicht wieder in Niveauflächen übergehen, lassen sich in der genannten Weise aus gelösten Problemen neue ableiten, und dazu liefsen sich noch zahlreiche Beispiele geben.

142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen. Thomson hat aber auch Beispiele behandelt, bei denen mehrfache Spiegelung vorkommt. Auch diese bedeutungsvolle Ergänzung seiner Methode soll an einfachen Beispielen verdeutlicht werden, bei denen es sich um Influenzerscheinungen auf mehreren Flächen zugleich handelt.

Aufgabe. In der Mitte zwischen zwei unbegrenzten Parallelebenen E_0 und E_1 befinde sich ein Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Dieser rufe auf jeder der leitenden Ebenen Influenz hervor, die beiden negativen Influenzelektrizitäten aber beeinflussen sich gegenseitig. Die elektrische Dichtigkeit für beliebig liegende Punkte der beiden Ebenen soll untersucht werden.

Auflösung. Man spiegele P_1 und die Ebene E_1 gegen die Ebene E_0, was P_{-1} mit der Ladung $-E$ und die Ebene E_{-1} giebt. Alles jetzt Vorhandene spiegele man gegen die Ebene E_1, das neu Erhaltene gegen E_0, das jetzt Neue gegen E_0 u. s. w. So erhält man auf der Geraden AB unendlich viele Punkte in gleichen Abständen $2l$ mit wechselnden Ladungen $+E$ und $-E$ und dazwischen entsprechende Ebenen. Jede der Ebenen ist Symmetrieebene des Problems der so geladenen Punkte. Die Punkte rechts und links von E_0 z. B. bringen

Fig. 108.



auf der Ebene eine Influenzverteilung hervor, die identisch mit der auf E_1 hervorgebrachten ist. Entfernt man jetzt alles, was rechts und links von E_1 liegt, so hat man die Lösung des Problems. Denn durch die entsprechende Belegung beider Ebenen ist alles Aufsenliegende ersetzt worden.

Nach Nr. 136 geben die Punkte P_1 und P_{-1} zusammen der Ebene E_0 in einem beliebigen Punkte die elektrische Dichtigkeit

$$\delta_1 = \frac{El}{2\pi(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn r die Entfernung des untersuchten Punktes von der Geraden AB ist. Die Punkte P_2 und P_{-2} haben von E_0 die Entfernung $3l$, sie haben entgegengesetzte Ladungen, wie die vorigen, verändern also die Normalkraft und geben die Dichtigkeit

$$\delta_2 = -\frac{E\cdot 3l}{2\pi(3l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

P_3 und P_{-3} geben

$$\delta_3 = +\frac{E5l}{2\pi(25l^2+r^2)},$$

und so geht es in unendlicher Reihe weiter. Die Dichtigkeit in dem untersuchten Beispiele wird also

$$\delta = -\frac{El}{2\pi}\left[\frac{1}{[l^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{[(3l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{[(5l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{[(7l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \cdots\right].$$

Diese Formel giebt die Dichtigkeit der Belegung beider Ebenen E_0 und E_1 in jedem Punkte. Die Reihe in der Klammer ist eine schnell konvergierende oszillierende. Bildet man die Lösungen der ersten n bezw. $(n+1)$ Glieder, so liegt die wirkliche Lösung zwischen diesen Resultaten. Man kann also für jeden Standpunkt der Berechnung die Fehlergrenze angeben. Eine geschlossene Lösung würde man allerdings erst haben, wenn man die Formel für die Summe der Reihe ermittelt hätte. Diese Ermittelung soll aber hier unterbleiben, da nur eine Idee von der Methode gegeben werden soll.

Die Summe der Elektrizitäten für jede Gesamtebene würde sein

$$-[E - E + E - E + E - E + \cdots],$$

so dafs die Vermutung nahe liegt, es würde sich um den Mittelwert zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungswerten O und $-E$, d. h. um $-\frac{E}{2}$ handeln. Dies ist in der That der Fall, denn man kann sich die beiden Ebenen im unendlichen Bereiche, wo die Dichtigkeit gleich Null ist, als geschlossen denken, wodurch nichts geändert wird. Man könnte sich z. B. vorstellen, dafs es sich um ein Drehungsellipsoid von der Drehungsachse $2l$ handelt, welches aber bis ins Unendliche reicht. Auf diesem würde die Influenzelektrizität gleich $-E$ sein, so dafs auf jeden der beiden Teile $-\frac{E}{2}$ kommt.