Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

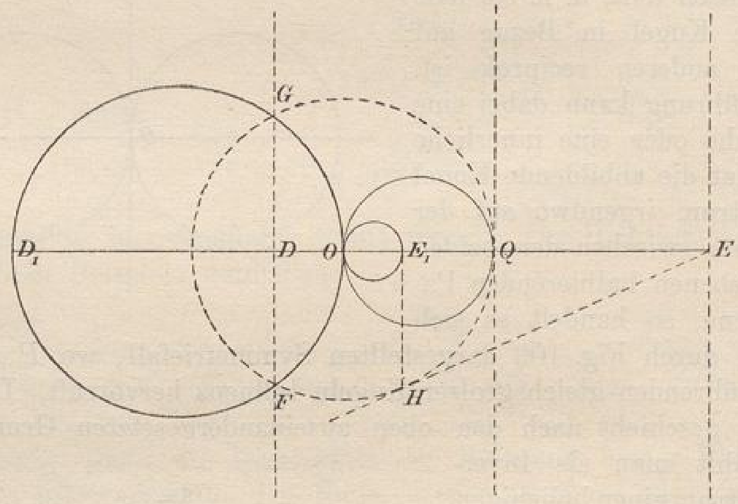
Leipzig, 1898

144) Übungsbeispiel für sich schneidende Ebenen

ist. Die äufsere Kugel ist das Reciproke des Innern in Bezug auf die mittlere Kugel, was dem Begriffe der isothermischen Teilung entspricht. Auf der letzteren Kugel liegt irgendwo der influenzierende Punkt, der die beiden anderen Kugeln beeinflufst.

Wählt man einen beliebigen Punkt O zwischen den Parallelebenen und OQ als Inversionsradius, so geht die Mittelebene in die Kugel

Fig. 111.



mit OQ als Durchmesser über, die in F und G von der Inversionskugel getroffene Ebene in die Kugel durch O, G, F und D_1, wobei $\sphericalangle\, OGD_1 = 90^0$, und

$$OD_1 = \frac{\varrho^2}{OD} = \frac{\varrho^2}{l - \varrho}$$

ist. Die letzte Ebene geht durch O und E_1, wobei E_1 mit Hilfe der Tangente EH und des Lotes HE_1 gefunden wird und

$$OE_1 = \frac{\varrho^2}{OE} = \frac{\varrho^2}{\varrho + l}$$

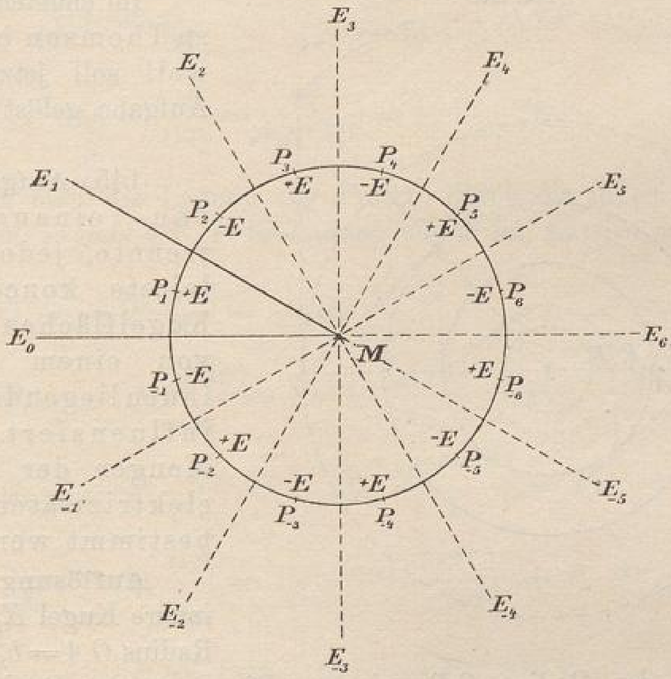
ist. Die durch O und Q gehende Kugel teilt den Raum zwischen den beiden anderen isothermisch, d. h. so, dafs die eine die Abbildung der anderen ist.

Der Fall, wo P beliebig zwischen den beiden Parallelebenen oder den sich berührenden Kugeln liegt, wird ganz ähnlich behandelt.

144) **Aufgabe.** Zwei Ebenen E_0 und E_1 mögen sich unter dem Winkel $30^0 = \frac{360^0}{12}$ schneiden. Auf der den Winkel halbierenden Ebene liege ein influenzierender Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Die Influenzverteilung soll untersucht werden.

Auflösung. Man bilde wie vorher die Spiegelbilder, was Punkte P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 mit abwechselnden Ladungen $-E, +E$, und ebenso Punkte $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \ldots P_{-6}$ mit solchen Ladungen giebt. Durch die sämtlichen Punkte werden die beiden Ebenen ersetzt.

Fig. 112.



P_1 und P_{-1} haben von E_0 die Entfernung l_1. Jeder Punkt in Entfernung x von der Senkrechten durch M hat von $P_1 P_{-1}$ die Entfernung $r_1 = x - MA_1$, wo A_1 den Schnitt von E_0 und $P_1 P_{-1}$ bedeutet. Die Dichte in ihm bestimmt sich als

$$\delta_1 = -\frac{E l_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(l_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

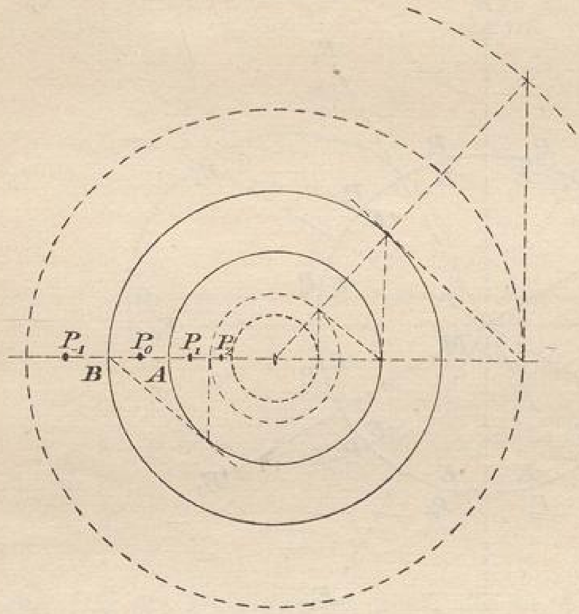
Ebenso haben P_2 und P_{-2} von E_0 die leicht zu berechnende Entfernung l_2. Der vorher behandelte Punkt hat von $P_2 P_{-2}$ die Entfernung $r_2 = x - A_2$. Dies giebt die Dichtigkeit

$$\delta_2 = +\frac{E l_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(l_2^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso bestimmt sich die aus den übrigen Punkten P_3 und P_{-3}, P_4 und P_{-4}, P_5 und P_{-5}, P_6 und P_{-6} hervorgehende Dichtigkeit. Diese kann also für die ganze Ebene E_0, also auch für die Halbebene ME_0 in geschlossener Form berechnet werden. Dies ist für jeden Winkel $\alpha = \frac{360^0}{2n}$ möglich, sobald n ganze Zahl ist.

Durch Abbildung erhält das Problem hier zwei sich unter α schneidende Kugeln und einen zwischen ihnen „isothermisch" liegenden Punkt.

Fig. 113.



Im engsten Anschlufs an Thomson bezw. Maxwell soll jetzt folgende Aufgabe gelöst werden:

145) **Aufgabe:** Zwei von einander getrennte, jedoch abgeleitete koncentrische Kugelflächen werden von einem zwischen ihnen liegenden Punkte influenziert. Die Mengen der Influenzelektrizitäten sollen bestimmt werden.

Auflösung. Die erste innere Kugel K_1 habe den Radius $OA = b$, die zweite, äufsere K_2 den Radius $OB = b \cdot e^w$. Die Lage des Punktes P sei durch $OP = b \cdot e^u$ bestimmt.

a) Zunächst werde P gegen K_1 gespiegelt, was den Punkt Q_0 geben mag, dann dieser gegen K_2, was P_1 giebt, dieser gegen K_1, was Q_2 giebt u. s. w. Dabei ist für jede durch K_1 vermittelte Spiegelung

$$OP \cdot OQ_0 = b^2, \quad OP_1 \cdot OQ_1 = b^2, \ \ldots, \ OP_s \cdot OQ_s = b^2;$$

für jede durch K_2 vermittelte ist

$$OQ_0 \cdot OP_1 = b^2 e^{2w}, \quad OQ_1 \cdot OP_2 = b^2 e^{2w}, \ \ldots, \ OQ_{s-1} \cdot OP_s = b^2 e^{2w}.$$

Demnach ist

$$OQ_0 = \frac{b^2}{OP} = \frac{b^2}{be^u} = be^{-u},$$

$$OP_1 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_0} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-u}} = be^{u+2w}$$

$$OQ_1 = \frac{b^2}{OP_1} = \frac{b^2}{be^{u+2w}} = be^{-(u+2w)}$$