Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

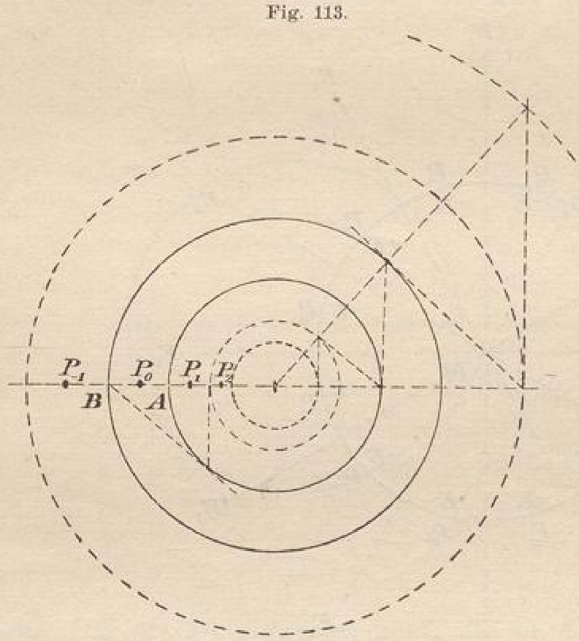
Leipzig, 1898

145) Übungsaufgabe für zwei koncentrische Kreise

ebene ME_0 in geschlossener Form berechnet werden. Dies ist für jeden Winkel $\alpha = \frac{360^0}{2n}$ möglich, sobald n ganze Zahl ist.

Durch Abbildung erhält das Problem hier zwei sich unter α schneidende Kugeln und einen zwischen ihnen „isothermisch" liegenden Punkt.

Fig. 113.



Im engsten Anschlufs an Thomson bezw. Maxwell soll jetzt folgende Aufgabe gelöst werden:

145) **Aufgabe:** Zwei von einander getrennte, jedoch abgeleitete koncentrische Kugelflächen werden von einem zwischen ihnen liegenden Punkte influenziert. Die Mengen der Influenzelektrizitäten sollen bestimmt werden.

Auflösung. Die erste innere Kugel K_1 habe den Radius $OA = b$, die zweite, äufsere K_2 den Radius $OB = b \cdot e^w$. Die Lage des Punktes P sei durch $OP = b \cdot e^u$ bestimmt.

a) Zunächst werde P gegen K_1 gespiegelt, was den Punkt Q_0 geben mag, dann dieser gegen K_2, was P_1 giebt, dieser gegen K_1, was Q_2 giebt u. s. w. Dabei ist für jede durch K_1 vermittelte Spiegelung

$$OP \cdot OQ_0 = b^2, \quad OP_1 \cdot OQ_1 = b^2, \ \ldots, \ OP_s \cdot OQ_s = b^2;$$

für jede durch K_2 vermittelte ist

$$OQ_0 \cdot OP_1 = b^2 e^{2w}, \quad OQ_1 \cdot OP_2 = b^2 e^{2w}, \ \ldots, \ OQ_{s-1} \cdot OP_s = b^2 e^{2w}.$$

Demnach ist

$$OQ_0 = \frac{b^2}{OP} = \frac{b^2}{be^u} = be^{-u},$$

$$OP_1 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_0} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-u}} = be^{u+2w}$$

$$OQ_1 = \frac{b^2}{OP_1} = \frac{b^2}{be^{u+2w}} = be^{-(u+2w)}$$

$$OP_2 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_1} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-(u+2w)}} = be^{u+4w}$$

$$\vdots$$

$$OP_s = \frac{b^2 e^{2w}}{OP_{s-1}} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-(u+2(s-1)w)}} = be^{u+2sw}$$

$$OQ_s = \frac{b^2}{OP_s} = \frac{b^2}{be^{u+2sw}} = be^{-(u+2sw)}.$$

Bezeichnet man die Ladung der Punkte durch die ihnen beigelegten Buchstaben, so daſs z. B. P die Ladung von P ist, so wird nach Nr. 139

$$Q_0 = -P\frac{be^{-u}}{b} = -Pe^{-u},$$

$$P_1 = -Q_0 \cdot \frac{OP_1}{\varrho_2} = Pe^{-u} \cdot \frac{be^{u+2w}}{be^{w}} = Pe^{w},$$

$$Q_1 = -P_1 \cdot \frac{OQ_1}{\varrho_1} = -Pe^{w}\frac{be^{-(u+2w)}}{b} = Pe^{-(u+w)},$$

$$P_2 = -Q_1\frac{OP_2}{\varrho_2} = Pe^{-(u+w)} \cdot \frac{be^{u+4w}}{be^{w}} = P \cdot e^{2w},$$

allgemein

$$P_s = Pe^{sw}, \quad Q_s = -Pe^{-(u+sw)}.$$

Dies ist bis ins Unendliche fortzusetzen.

b) Man bilde jetzt P gegen K_2 ab, was Q_1' giebt, sodann Q_1' gegen K_1, was P_1' giebt, dieses gegen K_2, was Q_2' giebt u. s. w. Dann wird entsprechend

$$OQ_1' = be^{2w-u}, \quad OP_1' = be^{u-2w}$$

$$OQ_2' = be^{4w-u}, \quad OP_1' = be^{u-4w},$$

und allgemein

$$OP_s' = be^{u-2sw}, \quad OQ_s' = be^{2sw-u}.$$

Die Ladungen werden allgemein

$$P_s' = Pe^{-sw}, \quad Q_s' = -Pe^{sw-u}.$$

c) Zu den Niveauflächen sämtlicher Punkte gehören die beiden Kugelflächen und alle ihre gegenseitigen Abbildungen. Die Kugel K_1 mit ihrer Belegung kann durch die innere Punktreihe, die Kugel K_2

mit der ihrigen durch die äußere Punktreihe ersetzt werden. Die innere Reihe enthält alle Punkte P' und Q, die äußere alle Punkte P und Q', alle P sind positiv, alle Q negativ geladen.

Die Ladung der inneren Kugel ist gleich der Summe der Ladungen aller Q und aller P'. Die einen geben

$$\sum_0^\infty Q_s = -Pe^{-u}(1 + e^{-w} + e^{-2w} + e^{-3w} + \cdots)$$

$$= -P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{-u}e^{w}}{e^{w}-1} = P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1},$$

die anderen

$$\sum_1^\infty P_s' = Pe^{-w}(1 + e^{-w} + e^{-2w} + \cdots)$$

$$= P\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} = P\frac{1}{e^{w}-1}.$$

Die Ladung der inneren Kugel wird also

$$E_1 = -P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1} + P\frac{1}{e^{w}-1} = -P\frac{e^{w-u}-1}{e^{w}-1},$$

oder

$$E_1 = -\frac{P}{e^u}\cdot\frac{e^w - e^u}{e^w - 1},$$

oder, da

$$e^u = \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OA} \quad \text{und} \quad e^w = \frac{OB}{b} = \frac{OB}{OA}$$

ist,

$$E_1 = -P\cdot\frac{OA}{OP}\cdot\frac{\frac{OB}{b}-\frac{OP}{b}}{\frac{OB}{b}-1},$$

d. h.

$$E_1 = -P\frac{OA}{OP}\cdot\frac{OB-OP}{OB-OA} = -P\frac{OA\cdot PB}{OP\cdot AB}.$$

d) Die äußeren Punkte geben auf der äußeren Kugel folgende Influenzmengen: P_s mit Ladung Pe^{sw} giebt auf der Kugel

$$P_s\cdot\frac{\varrho_2}{OP_s} = Pe^{sw}\cdot\frac{be^w}{be^{u+2sw}} = Pe^{-(u+(s-1)w)}.$$

Dies giebt die Reihe

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} = Pe^{-u}[e^0 + e^{-w} + e^{-2w} + \cdots] = P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{w-u}}{e^w-1}.$$

Jedes Glied der anderen Gruppe Q_s' mit Ladung $-Pe^{sw-u}$ giebt auf der Aufsenkugel die Ladung

$$-Pe^{sw-u}\frac{\varrho_2}{OQ_s'} = -Pe^{sw-u}\cdot\frac{be^w}{be^{2sw-u}} = -Pe^{w(1-s)}.$$

Die Summe von $s=1$ bis $s=\infty$ wird

$$-P[e^o+e^{-w}+e^{-2w}+\cdots] = -P\frac{1}{1-e^{-w}} = -P\frac{e^w}{e^w-1}.$$

Im ganzen ist die Belegung

$$-P\frac{e^w}{e^w-1}+P\frac{e^{w-u}}{e^w-1} = -P\frac{e^w-e^{w-u}}{e^w-1}.$$

Setzt man wieder

$$e^w=\frac{OB}{OA} \quad\text{und}\quad e^u=\frac{OP}{OA}$$

ein, so erhält man als Ladung

$$E_2=-P\cdot\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}.$$

e) Dabei ist

$$E_1+E_2=-P\left[\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB}+\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}\right]=-P\frac{OA\cdot PB+(OA+AB)AP}{OP\cdot AB}$$

$$=-P\frac{OA(PB+AP)+AB\cdot AP}{OP\cdot AB}=-P\cdot\frac{OA\cdot AB+AB\cdot AP}{OP\cdot AB}$$

$$=-P\cdot\frac{OA+AP}{OP}=-P.$$

Die beiden Kugeln zusammengenommen verhalten sich also wie ein geschlossener Hohlraum, bei dem die Influenzelektrizität dieselbe Menge hat, wie die influenzierende.

Ferner ist

$$E_1:E_2=OA\cdot PB:OB\cdot PA.$$

[Sind OA und OB unendlich grofs, aber AB endlich, so ist

$$E_1:E_2=PB:AP,$$

d. h. auf parallelen Ebenen verhalten sich die Mengen der Influenzelektrizität umgekehrt, wie die Abstände von der Ladung P_1 und zwar ist

$$E_1=-P\frac{PB}{AB},\quad E_2=-P\cdot\frac{AP}{AB}.$$

Damit ist ein wichtiges Resultat für das allgemeine Ebenenproblem gefunden, welches ganz ähnlich, wie das Kugelproblem, auf zwei Gruppen von Punkten führt.]

Liegt bei den koncentrischen Kugeln P auf der isothermisch teilenden Kugel, so ist

$$OA \cdot OB = OP^2 = (OA + AP)(OB - BP),$$

also

$$OA \cdot OB = OA \cdot OB + OB \cdot AP - BP(OA + AP),$$

d. h.

$$OB \cdot AP = BP \cdot OA + BP \cdot AP = BP \cdot OP.$$

Demnach wird in diesem Falle

$$E_1 = -E \frac{OA \cdot BP}{OP \cdot AB} = -E \frac{OB \cdot AP - BP \cdot AP}{OP \cdot AB}$$

$$= -E \frac{AP \cdot (OB - BP)}{OP \cdot AB} = -E \frac{AP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E \frac{AP}{AB}.$$

$$E_2 = -E \frac{OB \cdot AP}{OP \cdot AB} = -E \frac{BP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E \frac{BP}{AB}.$$

Das Verhältnis vereinfacht sich also zu

$$E_1 : E_2 = AP : BP,$$

während

$$E_1 + E_2 = -E$$

bleibt.

[Sind die Kreise unendlich grofs, also Parallelebenen, so liegt jetzt P auf der den Zwischenraum halbierenden Parallelebene und es wird $AP = BP$, also $E_1 = E_2$.]

In diesem Falle bilden die Radien der Bildpunkte, ebenso die der Ladungen, eine einfachere geometrische Reihe (letztere mit wechselnden Vorzeichen), so dafs die Rechnung einige Erleichterungen bietet, namentlich wenn man $OP_1 = 1$ setzt.

Die Berechnung der Dichtigkeit in jedem Punkte hat so zu erfolgen, dafs man bei der Innenkugel nach der früheren Dichtigkeitsformel für jeden Innenpunkt und seine Ladung die Dichtigkeiten festsetzt und die oszillierende Reihe aufstellt. Die Summierung derselben macht im allgemeinen Schwierigkeiten, da sie aber schnell konvergiert, ist der Fehler leicht einzugrenzen, denn die Summe liegt zwischen der Summe der n ersten und der Summe der $(n + 1)$ ersten Glieder. — Durch Abbildung kann man zu excentrischen Kreisen und auseinanderliegenden Kreisen übergehen.

Weitere Beispiele, besonders auch die Übertragung des Problems der Kreisscheibe auf die Kugelkalotte, findet man bei **Maxwell** und **Thomson**. Die Fruchtbarkeit der Methode ergiebt sich aber schon aus den hier behandelten Problemen.