Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel VIII. Centrobarische Flächenbelegungen und Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel VIII.

Centrobarische Flächenbelegungen und Körper.

146) Rückblick. Sowohl die homogene Kugelschale als auch die homogene Voll- und koncentrische Hohlkugel ziehen jede äufsere Masse so an, als ob ihre eigene Masse im Mittelpunkte, d. h. im Schwerpunkte, vereinigt wäre. Wird ferner eine Kugelschale so mit Masse belegt, dafs die Dichtigkeit umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von einem inneren oder äufseren Punkte ist, so ist der erstere, bezw. das Bild des zweiten, für jede äufsere Masse als Attraktionscentrum zu betrachten. Daraus folgt sofort für den Fall, dafs diese Masse in unendlicher Entfernung liegt, dafs das Attraktionscentrum zugleich der Schwerpunkt ist. Dasselbe gilt von der Vollkugel, sobald die Dichtigkeit umgekehrt proportional der 5^{ten} Potenz der Entfernung von einem äufseren oder inneren Punkte ist, ebenso von der entsprechenden excentrischen Hohlkugel, deren Flächen Orthogonalflächen zu dem Kreisbüschel durch den äufseren Punkt und sein Bild bezw. zu den zugehörigen Kugeln sind.

Ferner wurde folgendes gezeigt: Wird eine in sich geschlossene Fläche nach der Erde abgeleitet und von einem inneren Punkte aus, der mit der Elektrizität $+E$ geladen ist, influenziert, so ordnet sich die Influenzelektrizität $-E$ erster Art so an, dafs das Potential für den gesamten Aufsenraum gleich Null ist. Die Wirkungen der Ladung und die der Influenzelektrizität heben sich nach aufsen hin in jedem Punkte auf, abgesehen vom Vorzeichen wirkt also jede von beiden genau ebenso wie die andere. Die entsprechende Belegung der Fläche mit ponderabler Masse wirkt also nach aufsen genau ebenso, wie der mit derselben Masse versehene innere Punkt. Die nach aufsen gehenden Kraftlinien sind also Gerade, die Niveauflächen koncentrische Kreise. Da ferner die Asymptoten der Kraftlinien, d. h. die Geraden selbst, durch den Schwerpunkt gehen, so ist der den influenzierenden Punkt vertretende Massenpunkt zugleich Schwerpunkt der Belegung. Vgl. 136.

14*

147) Unterschied zwischen Flächen- und Körperbelegungen. Die Lehre von der Influenzelektrizität lehrt uns also, dafs es Massenbelegungen für in sich geschlossene Flächen giebt, die nach aufsen ebenso wirken, wie ein im Innern beliebig gelegener Massenpunkt, und zwar giebt es für jeden Massenpunkt eine bestimmte **und nur diese einzige Art der Belegung**, denn auch die Influenzelektrizität ordnet sich nur auf eine einzige Art an, sobald die Punktladung eine bestimmte Lage hat. Für solche Belegungen ist also das Attraktionscentrum in Bezug auf äufsere Massenpunkte und körperliche Massen von beliebiger Gestalt und Dichtigkeitsanordnung, sobald sie nur ganz aufsen liegen, stets dasselbe. Man nennt eine solche Belegung eine centrobarische Belegung.

Man kann sich nun den Innenraum kontinuierlich durch in sich geschlossene aufeinanderfolgende Flächen ausgefüllt denken, was auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen kann, da die gewählten Gestalten willkürliche sein können. Dabei soll jede der Flächen eine entsprechende centrobarische Belegung erhalten. Das Dichtigkeitsgesetz für den Körper wird dabei selbstverständlich ein anderes, wie für die einzelnen Flächen. Für die Kugel z. B. ging die 3^te^ Potenz in die 5^te^ über. Vgl. 140g. Dann ist der ganze Körper centrobarisch. Folglich:

Ein von einer in sich geschlossenen Fläche begrenzter Raum kann auf unendlich viele Arten so mit Masse angefüllt werden, dafs er centrobarisch wirkt und zwar wie ein der Lage nach in seinem Innern gegebenes Attraktionscentrum.

Aus dem centrobarischen Verhalten eines Körpers lassen sich also keine Schlüsse auf die Art der Massenverteilung in seinem Innern ziehen.

In den früheren Betrachtungen kamen aufser den oben genannten noch andere Ableitungen centrobarischer Belegungen vor. Man denke z. B. an das symmetrische Zweipunktproblem. Die Kraftlinien und Niveauflächen desselben werden nicht geändert, wenn man an Stelle des einen Punktes eines der getrennten Ovale setzt, natürlich mit der entsprechenden Belegung. Weil der Punkt durch das so belegte Oval ersetzt werden kann, wirken beide nach aufsen hin in übereinstimmender Weise. Das Oval hat also eine centrobarische Belegung und der Punkt ist deren Schwerpunkt. Dies gilt von allen Problemen für getrennte Massenpunkte und die Niveauflächen, die nur einen dieser Punkte umschliefsen, ihn also bei entsprechender Belegung ersetzen können.

148) Centrobarische Weltkörper. Angenommen, ein Weltkörper sei centrobarisch, dann wirkt er auf jeden äufseren Massen-

punkt so, als ob die Anziehung von dem Attraktionscentrum ausginge, umgekehrt wird er von allen ihn umgebenden Massen so angezogen, daſs sämtliche Einzelkräfte, also auch die Resultante, in diesem Centrum angreifen. Ist die Resultante gleich Null, so herrscht Gleichgewicht, denn drehende Kräftepaare können dabei nicht in Erscheinung treten. Der Körper kann um das Centrum beliebig gedreht werden, ohne daſs das Gleichgewicht gestört wird.

Denkt man sich diesen Weltkörper festliegend und auſser ihm nur noch einen einzigen anderen Weltkörper, dem irgend eine Geschwindigkeit in beliebiger Richtung gegeben werde, dann bewegt sich der letztere so, als ob er von einem festen Punkte angezogen würde, d. h. in einer Kegelschnittbahn, deren einer Brennpunkt das Attraktionscentrum ist.

Man denke sich zwei centrobarische Körper allein im Weltraume und gebe jedem eine nach Gröſse und Richtung beliebige Geschwindigkeit, dann werden sie sich folgendermaſsen bewegen. Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich geradlinig mit der reduzierten Anfangsgeschwindigkeit $\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, wobei im Zähler die Addition in mechanischem Sinne aufzufassen ist, also auch die Richtung giebt. Beide Körper bewegen sich in Bezug auf den ruhend zu denkenden Schwerpunkt in ähnlichen Kegelschnittbahnen, z. B. in Ellipsen; d. h. der Schwerpunkt jedes Einzelkörpers macht diese Bewegung. Auſserdem macht jeder Körper Drehungen um seinen Schwerpunkt, die zunächst um feste Hauptachsen, aber auch um irgendwie schwankende beliebige Achsen geschehen könnten. Diese Drehungen erfolgen aber ohne jede gegenseitige Einwirkung. Es wird sich jedoch zeigen, daſs Schwankungen der Achsen nicht stattfinden können, da das Centralellipsoid solcher Körper eine Kugel, also jede Schwerpunktsachse Hauptträgheitsachse, d. h. freie Drehungsachse ist.

Wäre also z. B. die Erde ein centrobarischer Körper, so würde die Sonne nicht imstande sein, an ihr Präzessionserscheinungen hervorzurufen; ebensowenig würde der Mond Nutationen der Erdachse veranlassen. Da diese Erscheinungen stattfinden, ist die Erde kein solcher Körper.

Die centrobarischen Körper geben also den einfachsten Fall für die astronomischen Theorien, z. B. für das Problem der zwei bezw. drei Körper, die auf einfache Punktprobleme reduziert werden können. Dergleichen Annahmen werden in der Regel stillschweigend gemacht, sie bedürfen aber der Präzisierung im Sinne der centrobarischen Theorie.

149) Einige Sätze über centrobarische Körper. Es lassen sich über solche Körper mehrere einfache Sätze aussprechen. Aus obigem geht zunächst folgender hervor:

Ist ein Körper centrobarisch in Bezug auf einen frei beweglichen Massenpunkt, so ist er es auch in Bezug auf jede beliebig gestaltete Masse.

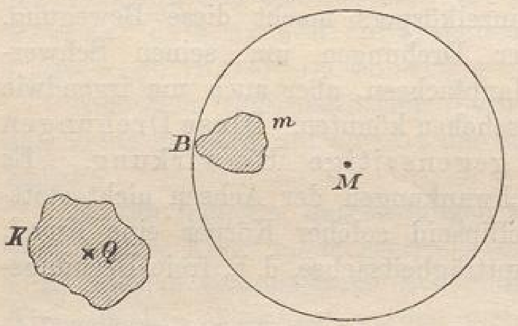
Die englischen Physiker haben auch den folgenden Satz und seinen Beweis für notwendig gehalten:

Ist ein Körper centrobarisch für eine einzige freibewegliche und irgendwie gestaltete Masse, so ist er es auch in Bezug auf jeden Massenpunkt (und jede beliebige andere Masse).

Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen:

Ist K der Körper und m die beliebig gestaltete Masse, auf die er in jeder Lage sich centrobarisch einwirkend verhält, so denke man sich eine beliebige Kugelfläche, die m berührend einschliefst, K aber ausschliefst. Durch Drehungen um den Mittelpunkt M kann man die Masse m in neue Lagen bringen. Nach der Voraussetzung wirkt sie dann stets so, dafs die anziehende Kraft im Attraktionscentrum Q angreift. Man denke sich nun die Kugelfläche in n^2 gleich grofse Felder eingeteilt, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise. Jedes der Felder soll in seinem Mittelpunkte von einem nach dorthin um M gedrehten Körper m berührt werden. Dabei wird angenommen, dafs ein Übergreifen der Körper ineinander nicht störend wirkt, aufserdem soll die Dichtigkeit δ jedes Punktes in $\frac{\delta}{n^2}$ verwandelt werden. Weil die Anziehungskraft jedes Körpers in Q angreift, greift auch die aller n^2 Körper dort an. Dies bleibt auch richtig, wenn man n unendlich grofs nimmt, wobei der Raum einer Vollkugel oder Hohlkugel gleichmäfsig und kontinuierlich mit solchen Körpern angefüllt ist. Die Masse jedes Punktes ist jetzt gleichmäfsig über die durch ihn gehende koncentrische Kugelfläche verteilt vorden, sie zieht jetzt so an, als ob sie in M befindlich wäre, und die Kraft greift in Q an. Dies gilt von sämtlichen Punkten der Masse M. Ihre neue Anziehung ist so, als ob die ganze Masse in M vereinigt wäre. In Bezug auf diesen willkührlich gewählten Punkt ist jetzt die Masse K centrobarisch, sie ist ebenso centrobarisch in Bezug auf jeden

Fig. 114.



beliebigen anderen Punkt ihres Aufsenraumes, also auch centrobarisch in Bezug auf jede beliebige aufsen liegende Masse.

Das Attraktionscentrum eines centrobarischen Körpers kann nur in seinem Innern liegen. Wird nämlich die betreffende Fläche von aufsen her influenziert, so wird bei Ableitung zur Erde zwar das Potential für den Innenraum gleich Null, aber nicht für Punkte des Aufsenraumes. Es ist nicht ausgeschlossen, dafs eine centrobarische Belegung entsteht, wie z. B. bei der Kugelfläche, aber dann ist nicht der äufsere, sondern ein innerer Punkt Attraktionscentrum. Sobald ein Körper seinen Schwerpunkt im Aufsenraume hat, kann er nicht centrobarisch sein. Ringkörper z. B., die durch Rotation entstehen, sind niemals centrobarisch. Auch ein aus getrennten Teilen bestehender Körper kann als Ganzes genommen nicht centrobarisch sein.

150) [Die wichtigste mechanische Eigenschaft centrobarischer Körper ist die, dafs ihr Centralellipsoid stets eine Kugel ist, so dafs jede Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheit ist. Ein vollkommen zwingender elementarer Beweis des Satzes scheint nicht möglich zu sein. Für vorgeschrittene Leser sei des Interesses halber, welches der Satz beansprucht, folgender Beweis gegeben.

Man umgebe den centrobarischen Körper mit einer in sich geschlossenen Fläche. Jede Belegung derselben greife ihn so an, als ob seine Masse nur im Attraktionscentrum befindlich wäre, denn jeder einzelne Punkt greift dort an. Ein Kräftepaar kann also nicht entstehen. Ist die Resultante gleich Null, so sind sämtliche Gleichgewichtsbedingungen, auch die der Kräftepaare, erfüllt. Der Schwerpunkt sei Anfangspunkt der Koordinaten.

Man denke sich jetzt die Belegung der Hilfsfläche derartig, dafs das Potential für jeden Punkt x, y, z des Innern den Wert xyz habe. Wird dann die Masseneinheit aus einer Lage x, y, z in eine Lage x_1, y_1, z_1 gebracht, so ist die Arbeit $x_1 y_1 z_1 - xyz$ nötig; ist δ die Dichte, so ist für jede Raumeinheit die Arbeit $\delta(x_1 y_1 z_1 - xyz)$ nötig, geschieht die Bewegung parallel zur X-Achse, so ist die Arbeit $\delta(x_1 - x) yz$ nötig, für sämtliche Punkte des Körpers also die Arbeit

$$\sum \delta (x_1 - x) yz = (x_1 - x) \sum \delta yz.$$

Da nun aber das Attraktionscentrum für den Körper gesetzt werden kann, ist zur Verschiebung von Null bis x_1 längs der X-Achse die Arbeit

$$m (x_1 - o) y \cdot z = m \cdot x_1 \cdot o \cdot o = o$$

nötig, also mufs auch

$$(x_1 - x)\sum \delta yz = o$$

sein, also, da $x_1 - x$ verschieden von Null ist,

$$\sum \delta yz = o.$$

Dies ist aber der Ausdruck für das Centrifugalmoment, und da dieses gleich Null ist, mufs die X-Achse Hauptachse sein. Die X-Achse war aber ganz willkürlich durch den Schwerpunkt gelegt, also ist jede Schwerpunktsachse Hauptachse, des Centralellipsoid also eine Kugel. (Vgl. Ing.-Math. I, Nr. 388.)

Befinden sich also zwei centrobarische Körper im Weltraum und giebt man jedem eine willkürlich fortschreitende und drehende Bewegung, so bleibt, während die beiden sich nach dem Planetengesetz umkreisen, die Drehungsachse eines jeden konstant gerichtet. Keiner der beiden beeinflufst den anderen in seiner Drehung. Es handelt sich also nur um das schon besprochene Problem zweier freien Massenpunkte. Bei dem Problem der drei Körper z. B. ist es gleichgültig, ob man centrobarische Körper oder Massenpunkte nimmt.

Für einfache Fälle, wie die centrobarische Belegung der Kugelfläche, läfst sich nach obigem die Gleichheit der Hauptträgheitsmomente auch elementar nachweisen.]

„Eins der überraschendsten Ergebnisse der wundervollen Greenschen Theorie des Potentials ist der Nachweis der Existenz centrobarischer Körper, und die Entdeckung derselben ist gewifs eine der merkwürdigsten und interessantesten von den verschiedenen Anwendungen dieser Theorie.“ So urteilen Thomson und Tait über den Gegenstand dieses Abschnitts. Es handelt sich um einen der Punkte, bei denen die Physik den Mathematiker auf neue Bahnen geleitet hat. Aus diesem Grunde wurde den betreffenden Körpern ein besonderes Kapitel gewidmet.