Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

149) Sätze über centrobarische Körper

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

149) Einige Sätze über centrobarische Körper. Es lassen sich über solche Körper mehrere einfache Sätze aussprechen. Aus obigem geht zunächst folgender hervor:

Ist ein Körper centrobarisch in Bezug auf einen frei beweglichen Massenpunkt, so ist er es auch in Bezug auf jede beliebig gestaltete Masse.

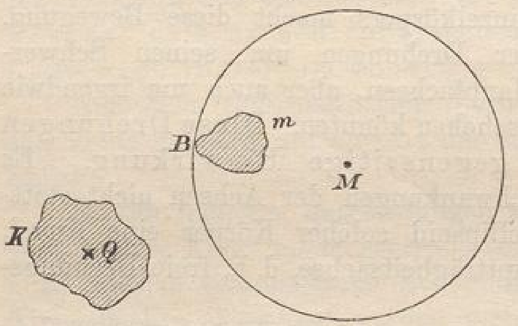
Die englischen Physiker haben auch den folgenden Satz und seinen Beweis für notwendig gehalten:

Ist ein Körper centrobarisch für eine einzige freibewegliche und irgendwie gestaltete Masse, so ist er es auch in Bezug auf jeden Massenpunkt (und jede beliebige andere Masse).

Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen:

Ist K der Körper und m die beliebig gestaltete Masse, auf die er in jeder Lage sich centrobarisch einwirkend verhält, so denke man sich eine beliebige Kugelfläche, die m berührend einschliefst, K aber ausschliefst. Durch Drehungen um den Mittelpunkt M kann man die Masse m in neue Lagen bringen. Nach der Voraussetzung wirkt sie dann stets so, dafs die anziehende Kraft im Attraktionscentrum Q angreift. Man denke sich nun die Kugelfläche in n^2 gleich grofse Felder eingeteilt, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise. Jedes der Felder soll in seinem Mittelpunkte von einem nach dorthin um M gedrehten Körper m berührt werden. Dabei wird angenommen, dafs ein Übergreifen der Körper ineinander nicht störend wirkt, aufserdem soll die Dichtigkeit δ jedes Punktes in $\frac{\delta}{n^2}$ verwandelt werden. Weil die Anziehungskraft jedes Körpers in Q angreift, greift auch die aller n^2 Körper dort an. Dies bleibt auch richtig, wenn man n unendlich grofs nimmt, wobei der Raum einer Vollkugel oder Hohlkugel gleichmäfsig und kontinuierlich mit solchen Körpern angefüllt ist. Die Masse jedes Punktes ist jetzt gleichmäfsig über die durch ihn gehende koncentrische Kugelfläche verteilt vorden, sie zieht jetzt so an, als ob sie in M befindlich wäre, und die Kraft greift in Q an. Dies gilt von sämtlichen Punkten der Masse M. Ihre neue Anziehung ist so, als ob die ganze Masse in M vereinigt wäre. In Bezug auf diesen willkührlich gewählten Punkt ist jetzt die Masse K centrobarisch, sie ist ebenso centrobarisch in Bezug auf jeden

Fig. 114.



beliebigen anderen Punkt ihres Aufsenraumes, also auch centrobarisch in Bezug auf jede beliebige aufsen liegende Masse.

Das Attraktionscentrum eines centrobarischen Körpers kann nur in seinem Innern liegen. Wird nämlich die betreffende Fläche von aufsen her influenziert, so wird bei Ableitung zur Erde zwar das Potential für den Innenraum gleich Null, aber nicht für Punkte des Aufsenraumes. Es ist nicht ausgeschlossen, dafs eine centrobarische Belegung entsteht, wie z. B. bei der Kugelfläche, aber dann ist nicht der äufsere, sondern ein innerer Punkt Attraktionscentrum. Sobald ein Körper seinen Schwerpunkt im Aufsenraume hat, kann er nicht centrobarisch sein. Ringkörper z. B., die durch Rotation entstehen, sind niemals centrobarisch. Auch ein aus getrennten Teilen bestehender Körper kann als Ganzes genommen nicht centrobarisch sein.

150) [Die wichtigste mechanische Eigenschaft centrobarischer Körper ist die, dafs ihr Centralellipsoid stets eine Kugel ist, so dafs jede Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheit ist. Ein vollkommen zwingender elementarer Beweis des Satzes scheint nicht möglich zu sein. Für vorgeschrittene Leser sei des Interesses halber, welches der Satz beansprucht, folgender Beweis gegeben.

Man umgebe den centrobarischen Körper mit einer in sich geschlossenen Fläche. Jede Belegung derselben greife ihn so an, als ob seine Masse nur im Attraktionscentrum befindlich wäre, denn jeder einzelne Punkt greift dort an. Ein Kräftepaar kann also nicht entstehen. Ist die Resultante gleich Null, so sind sämtliche Gleichgewichtsbedingungen, auch die der Kräftepaare, erfüllt. Der Schwerpunkt sei Anfangspunkt der Koordinaten.

Man denke sich jetzt die Belegung der Hilfsfläche derartig, dafs das Potential für jeden Punkt x, y, z des Innern den Wert xyz habe. Wird dann die Masseneinheit aus einer Lage x, y, z in eine Lage x_1, y_1, z_1 gebracht, so ist die Arbeit $x_1 y_1 z_1 - xyz$ nötig; ist δ die Dichte, so ist für jede Raumeinheit die Arbeit $\delta(x_1 y_1 z_1 - xyz)$ nötig, geschieht die Bewegung parallel zur X-Achse, so ist die Arbeit $\delta(x_1 - x)yz$ nötig, für sämtliche Punkte des Körpers also die Arbeit

$$\sum \delta (x_1 - x) yz = (x_1 - x) \sum \delta yz.$$

Da nun aber das Attraktionscentrum für den Körper gesetzt werden kann, ist zur Verschiebung von Null bis x_1 längs der X-Achse die Arbeit

$$m(x_1 - o) y \cdot z = m \cdot x_1 \cdot o \cdot o = o$$

nötig, also mufs auch