



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel IX. Selbstständiger Übergang zu den zweidimensionalen Problemen und zum logarithmischen Potential.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

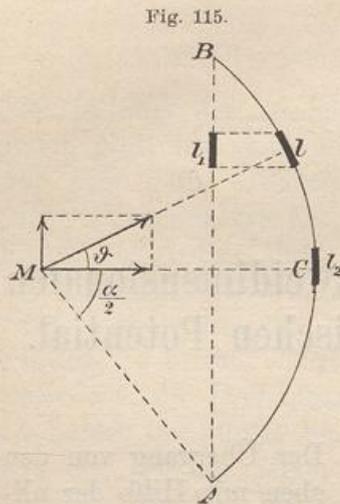
Kapitel IX.

Selbständiger Übergang zu den zweidimensionalen Problemen und zum logarithmischen Potential.

151) Allgemeine Vorbemerkungen. Der Übergang von den Raumproblemen zu denen der Ebene wurde oben mit Hilfe der allgemeinen Kraftlinientheorie gemacht. Früher pflegte man die Angelegenheit durch Rechnung zu erledigen. Da man dadurch einen neuen Einblick in die Theorie erhält, der auch solchen, die das vorher Besprochene nicht absolviert haben, ein bequemes Eindringen gestattet, und der ferner etwaige Zweifel beseitigen wird, so soll auch der Rechnungsweg angegeben werden. Einige dabei auftretende Wiederholungen möge man damit entschuldigen, daß auch dieses Kapitel in sich abgerundet sein möchte.

Die physikalische Bedeutung des Kapitels liegt nicht nur in den jetzt zu behandelnden stationären Strömungen der Wärme und Elektrizität in ebenen Platten, oder etwa nur in den entsprechenden Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit und der damit zusammenhängenden Theorie der freien Ausflußstrahlen im zweidimensionalen Gebiete, sondern auch in den elektromagnetischen Wirkungen geradliniger Ströme in beliebig gestalteten und gelagerten Drähten (Theorie der aus zahlreichen Drähten zusammengesetzten Kabel für elektrisches Licht und Telegraphie) und der damit zusammenhängenden Wirbelbewegungen. Dazu treten aber noch kartographische und hodo-graphische Deutungen und Anwendungen auf Kinematik, Elastizitäts- und Kapillaritätslehre, gewisse Fouriersche Wärmeprobleme und die Grundlagen der Forchheimerschen Theorie der Grundwasserbewegungen. Da die Funktionentheorie selbst das größte Interesse an dem Ausbau dieses Gebietes hatte, sind hier weit schnellere Fortschritte gemacht worden, als in dem von drei Dimensionen. Die Attraktionskonstante wird im folgenden stillschweigend gleich 1 gesetzt.

152) **Aufgabe.** Wie stark zieht ein homogener Kreisbogen den zugehörigen Kreismittelpunkt an?



Auflösung. Ist auf jeder Längeneinheit des Bogens die Masse 1 angebracht, ebenso auch in M , so zieht das Teilchen l den Mittelpunkt mit der Kraft $\frac{l}{r_2}$ an, von der man, da die Resultante durch den Halbierungspunkt C des Bogens geht, nur die Komponente $\frac{l}{r^2} \cos \vartheta$ braucht. Nun ist aber in Fig. 115 $l \cos \vartheta = l_1$, d. h. gleich der Projektion des Bogens l auf die Sehne AB , denn $\sphericalangle \vartheta_1 = \sphericalangle \vartheta$. Verlegt man nach C die Masse $l_2 = l_1 = l \cos \vartheta$, so zieht l_2 den Punkt M ebenso an, wie die wirksame Komponente von l . Dies gilt von jedem Teilchen. Folglich:

Die Anziehung des Kreisbogens \widehat{AB} ist ebenso groß, als die der nach C verlegten Masse der Sehne AB .

Diese Sehne hat die Länge $2r \sin \frac{\alpha}{2}$, ihre Anziehung ist, wenn sie in C konzentriert gedacht wird, gleich $\frac{2r \sin \frac{\alpha}{2}}{r^2}$ oder $\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{r}$, d. h. proportional dem Sinus des halben Centriwinkels (oder des zugehörigen Peripheriewinkels) und umgekehrt proportional dem Kreisradius.

Für den Halbkreis z. B. handelt es sich um

$$\frac{2 \sin 90^\circ}{r} = \frac{2}{r},$$

für den ganzen Kreis um

$$\frac{2 \sin 180^\circ}{r} = 0,$$

für den Viertelkreis um

$$\frac{2 \sin 45^\circ}{r} = \frac{2 \sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{r},$$

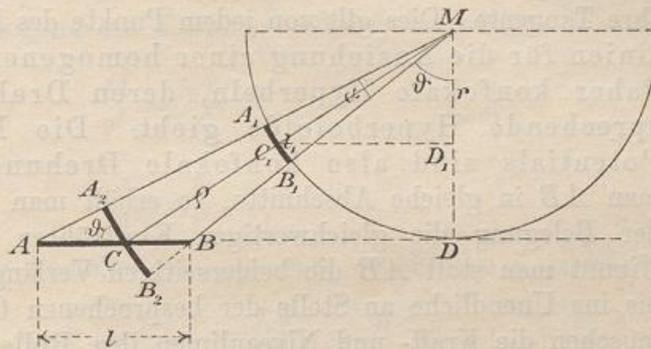
für den sechsten Teil der Kreislinie um

$$\frac{2 \sin 30^\circ}{r} = \frac{1}{r}.$$

153) **Aufgabe.** Wie stark zieht eine homogene unbegrenzte Gerade einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Ist M der freie Punkt, so schlage man um ihn den die Gerade in D berührenden Halbkreis und denke sich auf jeder Längeneinheit wieder die Masse 1 angebracht. Das kleine Masseteilchen $AB = l$ zieht den Punkt mit der Kraft $\frac{l}{\varrho^2}$ an, wenn $\varrho = MC$ ist. Seine Projektion auf den durch C gelegten konzentrischen Kreis ist $A_2B_2 = l \cos \vartheta$.

Fig. 116.



Diese wirkt auf M mit der Kraft $\frac{l \cos \vartheta}{\varrho^2}$. Die Projektion auf den Halbkreis ist

$$l_1 = A_1B_1 = A_2B_2 \cdot \frac{r}{\varrho} = (l \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta = l \cos^2 \vartheta = l \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Ihre Anziehung auf M ist

$$l \frac{r^2}{\varrho^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{l}{\varrho^2},$$

d. h. ebenso groß, wie die von $l = AB$ ausgeübte. Dies gilt von jedem Teilchen der Geraden. Folglich:

Die unbegrenzte Gerade zieht den Punkt M mit derselben Kraft an, wie der berührende Halbkreis, d. h. mit der Kraft $\frac{2}{r}$. Die Anziehung ist also umgekehrt proportional der Entfernung r .

Setzt man die Dichte δ der Belegung gleich $\frac{1}{2}$, so ist die Anziehung gleich $\frac{1}{r}$. Der Faktor 2 ist also ganz unwesentlich.

154) [Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden. Außerhalb des Ganges der Untersuchung kann man hier interessante Bemerkungen anknüpfen. Die Gerade AB zieht den Punkt M an mit der Kraft

$$\frac{l}{\varrho^2} - \left(\frac{lr^2}{\varrho^2}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{A_1B_1}{r^2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{r},$$

d. h. mit einer Kraft, die proportional dem Sinus des halben Gesichtswinkels α und umgekehrt proportional der Entfernung r von der Richtungslinie der Strecke ist. Weil jedes Teilchen von AB gleich seinem

Projektionsteilchen auf A_1B_1 ist, so fällt die Resultante MC in die Linie MC_1 , d. h. sie halbiert den Winkel und C teilt die Strecke AB im Verhältnis der Geraden AM und BM . Denkt man sich durch M eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B gelegt, so ist CM ihre Tangente. Dies gilt von jedem Punkte des Raumes. Die Kraftlinien für die Anziehung einer homogenen Strecke AB sind daher konfokale Hyperbeln, deren Drehung um AB entsprechende Hyperboloide giebt. Die Niveaulächen des Potentials sind also konfokale Drehungsellipsoide. Teilt man AB in gleiche Abschnitte, so erhält man wegen der Gleichheit der Belegung die gleichwertigen Krafröhren dieses Problems. — Nimmt man statt AB die beiderseitigen Verlängerungen der Geraden bis ins Unendliche an Stelle der besprochenen Geraden selbst, so vertauschen die Kraft- und Niveaulinien ihre Rolle. Ist die Gerade nur einseitig begrenzt, so handelt es sich um zwei Orthogonalscharen konfokaler Parabeln, bzw. um die entsprechenden Paraboloiden. Man könnte also schon an dieser Stelle den Übergang zu den elliptischen und parabolischen Koordinaten im Raume machen.

Man verwechsle aber das Problem der homogenen Geraden nicht mit dem der elektrischen Ladung einer Geraden, die unter keinen Umständen homogen wird, sondern infolge der gegenseitigen Abstofsungen eine Anhäufung nach den Endpunkten hin giebt. Auf diesen Punkt kommen wir noch zurück.]

155) Das Arbeitsdiagramm für die unbegrenzte Gerade und das logarithmische Potential. Man wiederhole an dieser Stelle das, was in Nr. 112 über die gleichseitige Hyperbel als Arbeitsdiagramm für die Entfernung eines Punktes von der homogenen, unbegrenzten Geraden und über die Berechnung des Flächeninhalts mit Hilfe des natürlichen Logarithmus, ebenso das, was über die Zellenverteilung des Raumes mit Hilfe konzentrischer Cylinder gesagt ist. Auch das in Nr. 113 über das logarithmische Potential

$$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_2 + \dots + m_n \lg r_n$$

beliebig verteilter Massenpunkte in der Ebene soll jetzt nicht noch einmal dargestellt werden.

156) **Aufgabe.** Mit welcher Kraft zieht die unbegrenzte Ebene einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Man denke sich Fig. 116 um den Radius MD ein wenig gedreht, so daß l ein kleines „Rechteck“ $f = bl$, l_1 ein kleines Rechteck $f_1 = b_1 l_1$ giebt, wobei

$$\frac{b_1}{b} = \frac{C_1 D_1}{CD} = \frac{r}{\rho}$$

ist. Während bei der dortigen Aufgabe $\frac{l}{\rho^2} = \frac{l_1}{r^2}$ war, ist jetzt bei homogener Flächenbelegung ein Faktor $\frac{b}{b_1}$ oder $\frac{\rho}{r}$ beizufügen, so daß

$$\frac{bl}{\rho^2} = \frac{b_1 l_1}{r^2} \cdot \frac{\rho}{r}$$

oder

$$\frac{f}{\rho^2} = \frac{f_1}{r^2} \cdot \frac{\rho}{r}$$

wird. Die senkrechte Anziehungskomponente der Fläche f wird

$$\frac{f}{\rho^2} \cdot \cos \vartheta = \frac{f}{\rho^2} \cdot \frac{r}{\rho} = \frac{f_1 \rho}{r^3} \cdot \frac{r}{\rho} = \frac{f_1}{r^2},$$

d. h. die Anziehung des Flächenteilchens f ist ebenso groß, wie die des nach D versetzten Flächenteilchens f_1 .

Dies gilt von jedem Teilchen der Grundfläche; die unbegrenzte homogene Ebene zieht also den Punkt M so an, als ob die homogene Belegung der Halbkugel in D konzentriert wäre. Die Massenbelegung der Halbkugel ist aber gleich $2r^2\pi$. Diese in D konzentrierte Masse übt auf die in M befindliche Einheit die Anziehung

$$\frac{2r^2\pi}{r^2} = 2\pi$$

aus, was von r unabhängig ist. Folglich:

Die mit der Dichte 1 homogen belegte unbegrenzte Ebene zieht die irgendwo im Raume befindliche Masseneinheit mit der konstanten Kraft 2π an.

157) Man wiederhole jetzt was in Nr. 114 über das sogenannte Planpotential und das Rechteck als Arbeitsdiagramm gesagt ist, ebenso die Bemerkungen in Nr. 114 und 104 über die Einteilung des Raums in Würfel durch zwei Scharen von Parallelebenen.

Es handelt sich dabei um das sogenannte homogene Feld. Jede kleine Raumzelle bei anderen Kraftlinien und Niveauflächen kann angenähert als homogenes Feld betrachtet werden. Dies gilt z. B. auch von der Anziehung der Erde in unmittelbarer Nähe ihrer Oberfläche, wo man sogar auf größere Strecken hin die Kraftlinien der Schwere als Parallele betrachten darf. Man darf also hier an Stelle des Newtonschen Potentials das Planpotential setzen. Dies soll zunächst in Bezug auf die stationäre Strömung in einem Flusse geschehen.

158) Stationäre Strömung eines geradlinigen Flusses von konstantem Querschnitt. Ist die Neigung einer schiefen Ebene die durch den sogenannten Reibungswinkel bestimmte, so wird ein auf ihr liegender Körper, der einen Stofs nach unten erhalten hat, sich ohne Beschleunigung, und wenn der Luftwiderstand gleich Null ist, auch ohne Verlangsamung, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Arbeit der Schwerkraft ist dabei gleich ph , wenn p das Gewicht des Körpers, h der Höhenunterschied ist. Das Arbeitsdiagramm ist also ein Rechteck. Die Geschwindigkeit hängt nur von der Stofskraft ab, nicht von der Steilheit der Ebene, die sich bekanntlich aus $\tan \alpha = \mu$ bestimmt, wo μ der Reibungskoeffizient ist.

Man denke sich an Stelle des festen Körpers eine stationär strömende Flüssigkeit, also einen geradlinigen Strom von konstantem rechteckigen Querschnitte. Die schwache Neigung der Ebene, auf der er herabfließt, soll ebenfalls konstant sein. Die kleine Geschwindigkeit ist dann ebenfalls konstant. Dabei soll von den durch Reibung an den Wänden hervorgerufenen Drehungen der Moleküle, die durch Reibung Störungen in den Bewegungen der Nachbarmoleküle hervorrufen, abgesehen werden. Die Bewegung sämtlicher Teilchen soll also geradlinig und mit derselben Geschwindigkeit erfolgen.

Während nun bei dem vorigen Beispiele die Geschwindigkeit durch die Kraft des Anstosses bestimmt war, nicht aber von der Neigung der schiefen Ebene, hängt sie hier wesentlich von der letzteren und von der Beschaffenheit des Flußbettes ab. Die Arbeit der Schwerkraft wird durch die Überwindung der Bewegungshindernisse gerade erschöpft, sonst würde die Bewegung nicht konstant sein. Die Widerstandsverhältnisse geben einen konstanten Widerstandsfaktor κ für die Geschwindigkeit. Für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Neigung lassen sich verschiedene Hypothesen aufstellen. Für die hier beabsichtigten Zwecke wird angenommen, die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit sei proportional der Tangente der Neigung. Bezeichnet man diese Projektion der Geschwindigkeit mit v , so hat man die Formel $v = \kappa_1 \tan \alpha$. Nun ist aber

$$\tan \alpha = \frac{h_1 - h_2}{w},$$

wo w der Horizontalweg, $h_1 - h_2$ die Höhendifferenz für die Endpunkte ist, demnach ist

$$v = \kappa_1 \frac{h_1 - h_2}{w}.$$

Den Ausdruck für $\tan \alpha$ bezeichnet man allgemein als das Gefälle oder das Gefällverhältnis. Nun ist aber nach obigem die Arbeit der

Schwerkraft proportional der Höhendifferenz, also ist auch das Potential proportional dieser Differenz, z. B. Potentialdifferenz gleich $\alpha_2(h_1 - h_2)$. Demnach ist

$$v = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\text{Potentialdifferenz}}{w},$$

also, wenn man $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha$ setzt,

$$v = \alpha \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Horizontalweg}}.$$

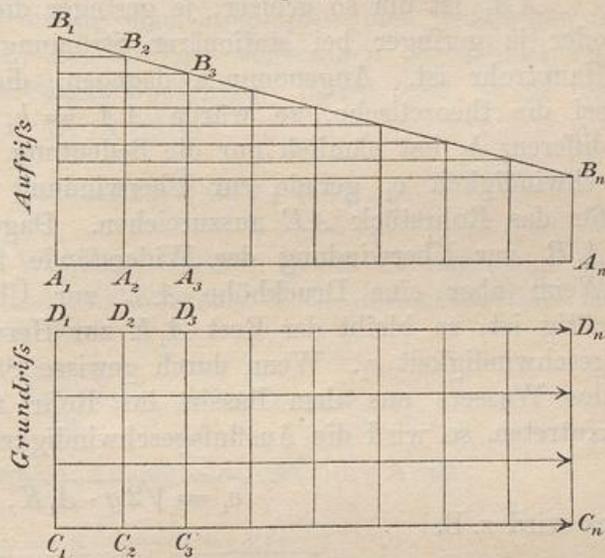
Die sekundlich durch jeden Querschnitt passierende Flüssigkeitsmenge ist also

$$m = vF = \alpha F \frac{V_1 - V_2}{w} = \alpha F \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Horizontalweg}}.$$

In Figur 117 sind diese Verhältnisse dargestellt. Man hat so ein Analogon für die Wärmeströmung in einem ebenen Parallelstreifen und für die Elektrizitätsströmung in einem solchen nach dem Ohm'schen Gesetze.

Bei senkrechtem Falle wird das Beispiel illusorisch, da dann $\frac{V_1 - V_2}{w}$ unendlich groß, die Projektion der Geschwindigkeit aber gleich Null wird. Zwar kann der Widerstand so groß gemacht werden, wie die Schwerkraft selbst, so daß die Geschwindigkeit irgend einen konstanten Wert erhält, aber mit der Formel selbst läßt nichts mehr anfangen. Praktisch hat sich also diese Analogie in bestimmten Grenzen zu halten, sie gilt nur für kleine Geschwindigkeiten und geringe Neigungen.

Fig. 117.



159) Druckhöhe in Wasserleitungsröhren von konstantem Querschnitt. Man denke sich ein Wasserbassin, von dessen Grunde ein horizontales Leitungsrohr ausgeht. Bei F ströme das Wasser mit beliebiger Geschwindigkeit v_1 , die kleiner als die theoretische Ausflufgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ sei, aus.

zu setzen. Man findet übrigens v_1 und h_1 durch Beobachtung, $A_2 K$ durch Berechnung aus $v_1 = \sqrt{2gA_2 K}$, so daß h_2 durch eine Subtraktion gefunden wird. Vgl. dazu Weisbach Ing. Mechanik u. s. w.]

Für unsere Zwecke reicht es aus, sich mit dem Diagramm AFA_1 zu beschäftigen. Die Druckdifferenzen entsprechen bestimmten Widerstandsarbeiten, sie veranschaulichen also Potentialdifferenzen.

Ganz ebenso sieht das Diagramm für die Potentialdifferenzen bei der elektrischen Strömung in einem homogenen Drahte aus, die bekanntlich dem Ohmschen Gesetze gehorcht. Auch dort werden die Potentialdifferenzen nur dazu verwandt, die Widerstände zu überwinden. Die Geschwindigkeiten werden dadurch nicht beeinflusst. Man vgl. dazu das in Nr. 54 Gesagte. Die Potentialdifferenzen sind hier proportional den Weglängen.

Ebenso ist es mit der Fortbewegung der Wärme in einer dünnen Platte von der Gestalt eines Parallelstreifens, dessen eines Ende auf der konstanten Temperatur t_1 gehalten wird, während das andere auf der niedrigeren t_n steht. Die Lote entsprechen den Temperaturen. Dasselbe gilt von der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Kanale von überall konstantem rechteckigen Querschnitt und dem zugehörigen Geschwindigkeitspotential. Maßgebend ist für die passierende Menge überall der Ausdruck

$$\lambda F \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda FG = \lambda F \tan \alpha,$$

wo λ der Leitungs- oder Widerstandsfaktor, F der Querschnitt, w die Weglänge, $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz, G das Potentialgefälle ist. Die Geschwindigkeit selbst ist

$$v = \lambda \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda G = \lambda \tan \alpha,$$

während beim Newtonschen Anziehungsgesetz die Kraft

$$p = \kappa \frac{V_2 - V_1}{w} = \kappa G$$

war.

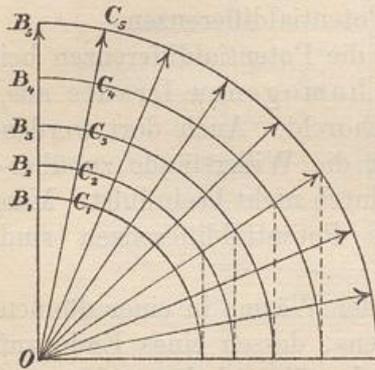
160) Ausdehnung der Analogien auf die Radialströmung in ebenen Platten.

Die Strömung erfolge jetzt in einer dünnen, überall gleich starken ebenen Platte, entweder von O aus nach allen Seiten hin, oder innerhalb eines Sektors OB_5C_5 . Soll die Strömung stationär sein, so muß durch die Bogen $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \dots$ u. s. w. dieselbe Menge passieren, d. h. die Geschwindigkeit muß umgekehrt proportional dem Radius r sein, d. h. es ist

$$v_1 : v_n = r_n : r_1 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

oder, da die Geschwindigkeit proportional dem Gefälle $\tan \alpha$ angenommen wird (Nr. 155),

Fig. 119.



$$\tan \alpha_1 : \tan \alpha_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n}.$$

Das veränderliche Gefälle läßt sich also in der Form

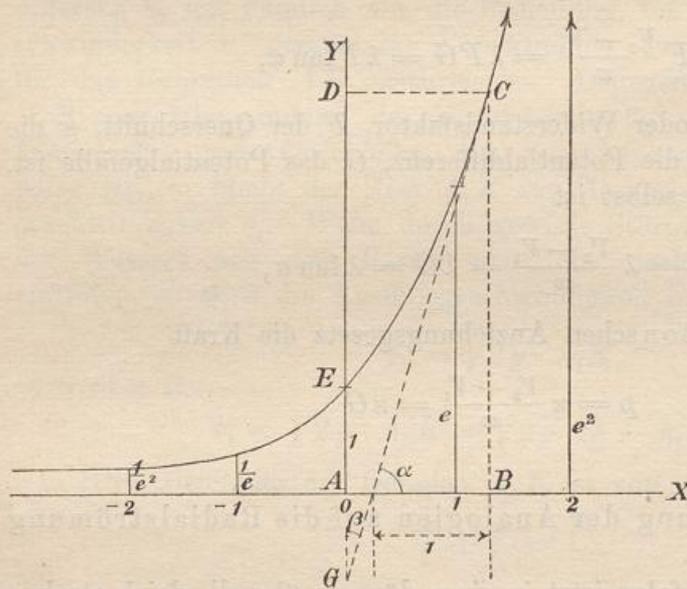
$$\tan \vartheta = c \cdot \frac{1}{r}$$

schreiben, oder, wenn man für ϑ den Supplementwinkel φ und $c = 1$ setzt,

$$\tan \varphi = -\frac{1}{r}.$$

Da man nach Nr. 112 auf das logarithmische Potential kommen muß, steht zu vermuten, daß diese Gleichung die einer logarithmischen Linie ist. Die Gleichung der letzteren in gewöhnlicher Lage ist

Fig. 120.



$y = e^x$. Nach Ing.-Math. I Seite 150 ist in Fig. 120 $\tan \alpha = \frac{BC}{1}$ oder

$$\tan \alpha = e^x = y,$$

folglich

$$\tan \beta = \frac{1}{y}.$$

Betrachtet man also die positive Y-Achse als positive X-Achse, so ist die Gleichung der aufsteigenden logarithmischen Linie durch

$$\tan \beta = \frac{1}{x}$$

charakterisiert, die der absteigenden durch

$$\tan \varphi = -\frac{1}{x},$$

oder, wie oben des radialen Charakters wegen geschrieben ist, durch

$$\tan \varphi = -\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung läßt sich auch schreiben $r = e^{-y}$, oder $\frac{1}{r} = e^y$, oder endlich

$$y = -\lg r.$$

Die Höhe y hat wiederum die Bedeutung eines Potentials. Verschiebung und Vergrößerung verwandeln die Gleichung in

$$y = a - c \lg r.$$

Behält man die bei den oben angegebenen Analogien festgestellten Annahmen bei, so ergibt sich folgendes:

Erweitert sich das Bett eines Flusses nach Art eines Kreissektors und soll seine Tiefe bei stationärer Strömung trotzdem überall gleich groß bleiben, so muß, da die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Radius ist, das Gefälle nach dem Gesetz einer logarithmischen Linie abnehmen, deren Gleichung durch

$$y = a - c \lg r$$

dargestellt wird.

Erweitert sich ebenso fächerförmig das horizontale Ableitungsrohr einer Wasserleitung bei überall gleicher Höhe, so werden die Wasserstandhöhen in den Druckröhren nach demselben Gesetz abnehmen.

Dasselbe gilt von den Werten des elektrischen Potentials für den Fall, daß in einem Punkte (kleinem Kreise) in eine Platte Elektrizität eingeführt und an dem durch einen concentrischen Kreis gebildeten Rande abgeleitet wird.

Dasselbe gilt von der ebenso eingeleiteten und abgeleiteten Wärme und den entsprechenden Temperaturen.

Weil das Gesetz ein logarithmisches ist, so gehören zu gleichen Potentialdifferenzen nicht etwa gleiche Wege, sondern einer arithmetischen Reihe von Potentialen entspricht eine geometrische Reihe von Abständen, und zwar nimmt die eine ab, wenn die andere zunimmt.

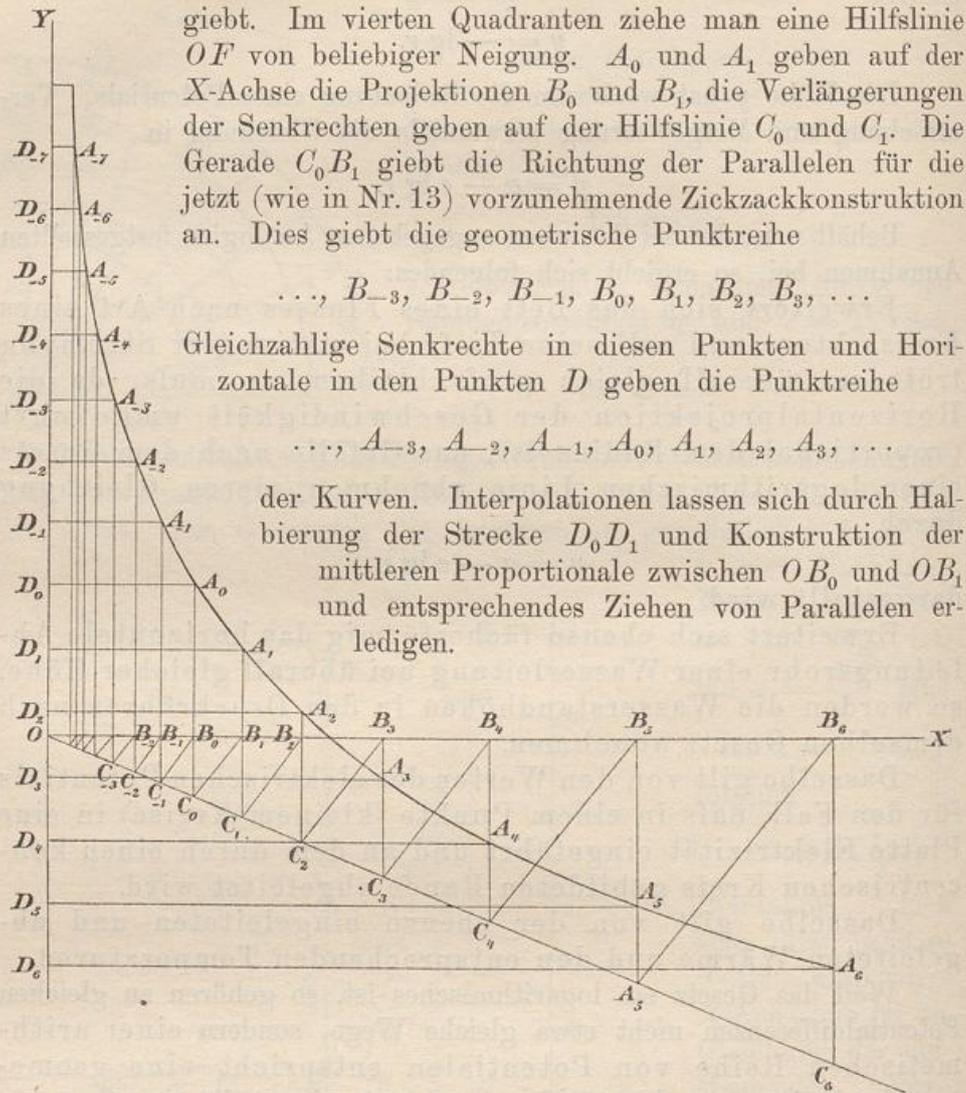
Kennt man demnach zwei Punkte der Kurve, so kann man beliebig viele Punkte elementar konstruieren.

161) Konstruktion der Potentialkurve für radiale Strömung aus zwei Punkten.

Auflösung. A_0 und A_1 seien die gegebenen Punkte. Man projiziere beide auf die Y -Achse, was D_0 und D_1 giebt. Den Abstand $D_0 D_1$

trage man nach oben und unten beliebig oft ab, was eine arithmetische Punktreihe

Fig. 121.



— . . . , $D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$

giebt. Im vierten Quadranten ziehe man eine Hilfslinie OF von beliebiger Neigung. A_0 und A_1 geben auf der X -Achse die Projektionen B_0 und B_1 , die Verlängerungen der Senkrechten geben auf der Hilfslinie C_0 und C_1 . Die Gerade C_0B_1 giebt die Richtung der Parallelen für die jetzt (wie in Nr. 13) vorzunehmende Zickzackkonstruktion an. Dies giebt die geometrische Punktreihe

. . . , $B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$

Gleichzahlige Senkrechte in diesen Punkten und Horizontale in den Punkten D geben die Punktreihe

. . . , $A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$

der Kurven. Interpolationen lassen sich durch Halbierung der Strecke D_0D_1 und Konstruktion der mittleren Proportionale zwischen OB_0 und OB_1 und entsprechendes Ziehen von Parallelen erledigen.

Die Gleichung der Kurve muß nach obigem von der Form

$$1) \quad y = a - b \lg r$$

sein. Nun war gegeben

$$y_0 = B_0A_0, \quad y_1 = B_1A_1, \quad r_0 = D_0A_0, \quad r_1 = D_1A_1.$$

Die Konstanten a und b sind also zu bestimmen aus

$$y_0 = a - b \lg r_0$$

$$y_1 = a - b \lg r_1.$$

Durch Subtraktion folgt

$$y_0 - y_1 = -b (\lg r_0 - \lg r_1),$$

es ist also

$$b = -\frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1},$$

demnach

$$\begin{aligned} a = y_0 + b \lg r_0 &= y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0 = y_1 + b \lg r_1 \\ &= y_1 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r_1. \end{aligned}$$

Dadurch ist die Gleichung 1) fest bestimmt. Sie lautet

$$2) \quad y = \left(y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0 \right) + \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r.$$

Statt y_0 und y_1 hat man beim Wärmeproblem die gegebenen Temperaturen T_0 und T_1 für Anfang und Ende einzusetzen. Die Temperatur für jede zwischen liegende Stelle ergibt sich dann aus Gleichung 2). Dasselbe gilt von den Potentialwerten V_0 und V_1 für elektrische Strömung.

Das Gefälle an jeder Stelle ergibt sich aus

$$G = -\frac{T_\alpha - T_\beta}{r_\alpha - r_\beta} = -\frac{(a - b \lg r_\alpha) - (a - b \lg r_\beta)}{r_\alpha - r_\beta} = b \frac{\lg r_\alpha - \lg r_\beta}{r_\alpha - r_\beta},$$

wo r_α und r_β benachbarte Werte sind, oder für die Grenze aus

$$G = b \frac{1}{r}.$$

Die durch die Querschnittseinheit sekundlich passierende Wärme ist also

$$W = \kappa \cdot b \frac{1}{r},$$

wo κ der Leitungskoeffizient ist. Bei Metalldicke d geht durch jeden Kreis (vom Radius r) die konstante Menge

$$W = 2r\pi dx b \cdot \frac{1}{r} = 2\pi dx b.$$

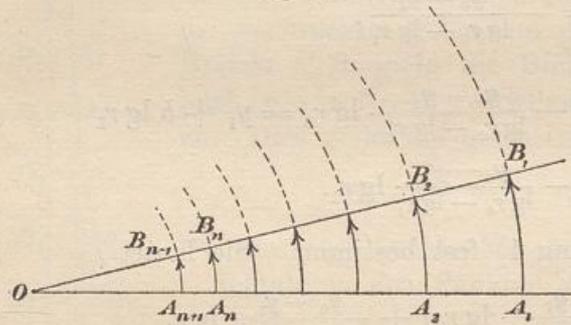
Dasselbe gilt von entsprechenden elektrischen Mengen E , nur ist dabei die Dicke der Platte als sehr klein anzunehmen. Hat man die Ebene in n Sektoren eingeteilt, so wandert durch jeden Sektorenquerschnitt, d. h. durch jede Quadratseite, die Wärmemenge

$$W = \frac{2\pi}{n} dx b.$$

Schon in Fig. 86 b war die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige Zellen, d. h. in Quadrate gegeben.

162) Das Vertauschungsproblem der Radialströmung. Für das spätere ist folgende Bemerkung von besonderer Wichtigkeit. Bei

Fig. 122.



der Einteilung der Ebene in gleiche Quadrate ist es gleichgültig, welche der beiden Parallelenscharen man als Stromlinien, welche man als Niveaulinien betrachte. Da man nun hier jedes kleine quadratische Flächenstück als wirkliches Quadrat betrachten kann, so muß es gestattet sein, die Kreise als Strom-

linien, die Geraden durch O als Niveaulinien zu betrachten. Denkt man sich z. B. bei kreisförmiger Platte den Radius OA_1 auf der Temperatur T_a , den Radius OB_1 auf der Temperatur T_b gehalten, so erhält aus Symmetriegründen die Winkelhalbierende die Temperatur $\frac{T_a + T_b}{2}$. Durch weitere Winkelhalbierung erhält man beliebig viele Isothermen, deren Temperaturen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Stellt man die Temperaturen durch Lote auf der Ebene dar, so entsteht eine Schraubenfläche einfachster Art.

Das Temperaturgefälle auf A_1B_1 ist

$$G_1 = \frac{T_a - T_b}{w_1},$$

auf A_2B_2 ist es

$$G_2 = \frac{T_a - T_b}{w_2},$$

es ist also

$$G_1 : G_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2},$$

d. h. das Gefälle ist wiederum umgekehrt proportional dem Radius. Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit $v = \kappa G$ der Wärmeströmung oder der zum Vergleich herangezogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Nun ist aber bei unendlicher Kleinheit der Quadrate

$$\overline{A_1A_2} : \overline{A_nA_{n+1}} = r_1 : r_n,$$

oben war

$$v_1 : v_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

folglich ist

$$v_1 \cdot \overline{A_1 A_2} = v_n \cdot \overline{A_n A_{n+1}}.$$

Folglich: Durch alle Quadratseiten auf jedem Sektorenquerschnitt strömt sekundlich dieselbe Wärmemenge. Also ist die quadratische Einteilung auch für das Vertauschungsproblem eine potentiell gleichwertige.

Sind ferner T_α und T_β benachbarte Temperaturdifferenzen und der Abstand für die Entfernung r gleich $\frac{2r\pi}{n}$, wobei n sehr groß ist, so ist das Gefälle nach obigem

$$G = \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = \frac{n}{2\pi} \cdot (T_\alpha - T_\beta) \frac{1}{r} = b \frac{1}{r},$$

die sekundlich überströmende Menge pro Flächeneinheit des Querschnitts also ist

$$W = \kappa G = \kappa b \frac{1}{r} = \kappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}}.$$

Auf die Quadratbreite $\frac{2r\pi}{n}$ kommt also bei Dicke d der Platte die Menge

$$W = d \frac{2r\pi}{n} \cdot \kappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = d\kappa (T_\alpha - T_\beta) = \frac{2\pi d\kappa b}{n},$$

was der Schlufsgleichung des vorigen Problems entspricht. Durch je n auf demselben Radius aufeinander folgende Quadratseiten strömt das n fache, also

$$W = 2\pi d\kappa b,$$

und dies entspricht der Strömung durch jeden Vollkreis des vorigen Problems. Die Analogie ist also eine vollkommene.

In dieser Weise läßt sich zu jedem Problem ein Vertauschungsproblem aufstellen, bei dem die Strom- und Niveaulinien ihre Rollen wechseln.