Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

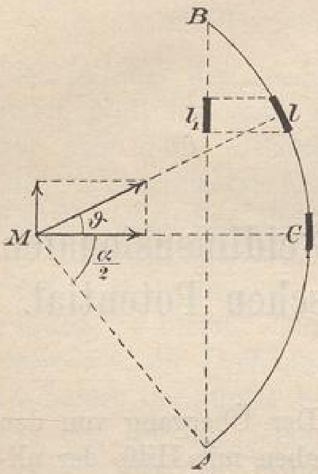
Leipzig, 1898

153) Anziehung der homogenen Geraden

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

152) **Aufgabe.** Wie stark zieht ein homogener Kreisbogen den zugehörigen Kreismittelpunkt an?

Fig. 115.



Auflösung. Ist auf jeder Längeneinheit des Bogens die Masse 1 angebracht, ebenso auch in M, so zieht das Teilchen l den Mittelpunkt mit der Kraft $\frac{l}{r_2}$ an, von der man, da die Resultante durch den Halbierungspunkt C des Bogens geht, nur die Komponente $\frac{l}{r^2}\cos\vartheta$ braucht. Nun ist aber in Fig. 115 $l\cos\vartheta = l_1$, d. h. gleich der Projektion des Bogens l auf die Sehne AB, denn $\sphericalangle\,\vartheta_1 = \sphericalangle\,\vartheta$. Verlegt man nach C die Masse $l_2 = l_1 = l\cos\vartheta$, so zieht l_2 den Punkt M ebenso an, wie die wirksame Komponente von l. Dies gilt von jedem Teilchen. Folglich:

Die Anziehung des Kreisbogens $\widehat{AB}$ ist ebenso grofs, als die der nach C verlegten Masse der Sehne AB.

Diese Sehne hat die Länge $2r\sin\frac{\alpha}{2}$, ihre Anziehung ist, wenn sie in C koncentriert gedacht wird, gleich $\frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}$ oder $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{r}$, d. h. proportional dem Sinus des halben Centriwinkels (oder des zugehörigen Peripheriewinkels) und umgekehrt proportional dem Kreisradius.

Für den Halbkreis z. B. handelt es sich um

$$\frac{2\sin 90^0}{r} = \frac{2}{r},$$

für den ganzen Kreis um

$$\frac{2\sin 180^0}{r} = 0,$$

für den Viertelkreis um

$$\frac{2\sin 45^0}{r} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{r},$$

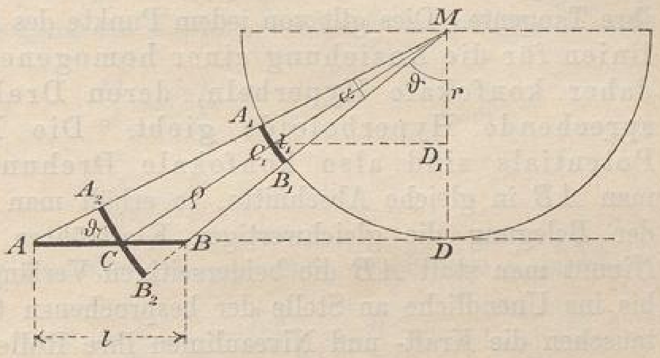
für den sechsten Teil der Kreislinie um

$$\frac{2\sin 30^0}{r} = \frac{1}{r}.$$

153) **Aufgabe.** Wie stark zieht eine homogene unbegrenzte Gerade einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Ist M der freie Punkt, so schlage man um ihn den die Gerade in D berührenden Halbkreis und denke sich auf jeder Längeneinheit wieder die Masse 1 angebracht. Das kleine Massenteilchen $AB = l$ zieht den Punkt mit der Kraft $\frac{l}{\varrho^2}$ an, wenn $\varrho = MC$ ist. Seine Projektion auf den durch C gelegten koncentrischen Kreis ist $A_2B_2 = l \cos\vartheta$.

Fig. 116.



Diese wirkt auf M mit der Kraft $\frac{l\cos\vartheta}{\varrho^2}$. Die Projektion auf den Halbkreis ist

$$l_1 = A_1B_1 = A_2B_2 \cdot \frac{r}{\varrho} = (l\cos\vartheta)\cdot\cos\vartheta = l\cos^2\vartheta = l\frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Ihre Anziehung auf M ist

$$l\frac{r^2}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{l^2}{\varrho^2},$$

d. h. ebenso grofs, wie die von $l = AB$ ausgeübte. Dies gilt von jedem Teilchen der Geraden. Folglich:

Die unbegrenzte Gerade zieht den Punkt M mit derselben Kraft an, wie der berührende Halbkreis, d. h. mit der Kraft $\frac{2}{r}$. Die Anziehung ist also umgekehrt proportional der Entfernung r.

Setzt man die Dichte δ der Belegung gleich $\frac{1}{2}$, so ist die Anziehung gleich $\frac{1}{r}$. Der Faktor 2 ist also ganz unwesentlich.

154) [Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden. Aufserhalb des Ganges der Untersuchung kann man hier interessante Bemerkungen anknüpfen. Die Gerade AB zieht den Punkt M an mit der Kraft

$$\frac{l}{\varrho^2} - \left(\frac{lr^2}{\varrho^2}\right)\frac{1}{r^2} = \frac{A_1B_1}{r^2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{r},$$

d. h. mit einer Kraft, die proportional dem Sinus des halben Gesichtswinkels α und umgekehrt proportional der Entfernung r von der Richtungslinie der Strecke ist. Weil jedes Teilchen von AB gleich seinem