Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

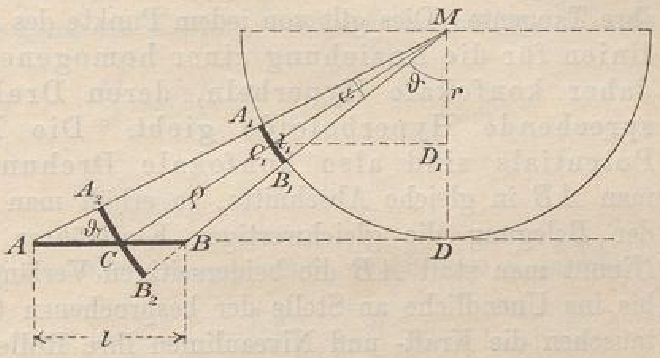
Leipzig, 1898

154) Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Auflösung. Ist M der freie Punkt, so schlage man um ihn den die Gerade in D berührenden Halbkreis und denke sich auf jeder Längeneinheit wieder die Masse 1 angebracht. Das kleine Massenteilchen $AB = l$ zieht den Punkt mit der Kraft $\frac{l}{\varrho^2}$ an, wenn $\varrho = MC$ ist. Seine Projektion auf den durch C gelegten koncentrischen Kreis ist $A_2B_2 = l \cos \vartheta$.

Fig. 116.



Diese wirkt auf M mit der Kraft $\frac{l \cos \vartheta}{\varrho^2}$. Die Projektion auf den Halbkreis ist

$$l_1 = A_1B_1 = A_2B_2 \cdot \frac{r}{\varrho} = (l \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta = l \cos^2 \vartheta = l \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Ihre Anziehung auf M ist

$$l \frac{r^2}{\varrho^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{l^2}{\varrho^2},$$

d. h. ebenso grofs, wie die von $l = AB$ ausgeübte. Dies gilt von jedem Teilchen der Geraden. Folglich:

Die unbegrenzte Gerade zieht den Punkt M mit derselben Kraft an, wie der berührende Halbkreis, d. h. mit der Kraft $\frac{2}{r}$. Die Anziehung ist also umgekehrt proportional der Entfernung r.

Setzt man die Dichte δ der Belegung gleich $\frac{1}{2}$, so ist die Anziehung gleich $\frac{1}{r}$. Der Faktor 2 ist also ganz unwesentlich.

154) [Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden. Aufserhalb des Ganges der Untersuchung kann man hier interessante Bemerkungen anknüpfen. Die Gerade AB zieht den Punkt M an mit der Kraft

$$\frac{l}{\varrho^2} - \left(\frac{lr^2}{\varrho^2}\right)\frac{1}{r^2} = \frac{A_1B_1}{r^2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{r},$$

d. h. mit einer Kraft, die proportional dem Sinus des halben Gesichtswinkels α und umgekehrt proportional der Entfernung r von der Richtungslinie der Strecke ist. Weil jedes Teilchen von AB gleich seinem

Projektionsteilchen auf $A_1 B_1$ ist, so fällt die Resultante MC in die Linie MC_1, d. h. sie halbiert den Winkel und C teilt die Strecke AB im Verhältnis der Geraden AM und BM. Denkt man sich durch M eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B gelegt, so ist CM ihre Tangente. Dies gilt von jedem Punkte des Raumes. Die Kraftlinien für die Anziehung einer homogenen Strecke AB sind daher konfokale Hyperbeln, deren Drehung um AB entsprechende Hyperboloide giebt. Die Niveauflächen des Potentials sind also konfokale Drehungsellipsoide. Teilt man AB in gleiche Abschnitte, so erhält man wegen der Gleichheit der Belegung die gleichwertigen Kraftröhren dieses Problems. — Nimmt man statt AB die beiderseitigen Verlängerungen der Geraden bis ins Unendliche an Stelle der besprochenen Geraden selbt, so vertauschen die Kraft- und Niveaulinien ihre Rolle. Ist die Gerade nur einseitig begrenzt, so handelt es sich um zwei Orthogonalscharen konfokaler Parabeln, bezw. um die entsprechenden Paraboloide. Man könnte also schon an dieser Stelle den Übergang zu den elliptischen und parabolischen Koordinaten im Raume machen.

Man verwechsle aber das Problem der homogenen Geraden nicht mit dem der elektrischen Ladung einer Geraden, die unter keinen Umständen homogen wird, sondern infolge der gegenseitigen Abstofsungen eine Anhäufung nach den Endpunkten hin giebt. Auf diesen Punkt kommen wir noch zurück.]

155) Das Arbeitsdiagramm für die unbegrenzte Gerade und das logarithmische Potential. Man wiederhole an dieser Stelle das, was in Nr. 112 über die gleichseitige Hyperbel als Arbeitsdiagramm für die Entfernung eines Punktes von der homogenen, unbegrenzten Geraden und über die Berechnung des Flächeninhalts mit Hilfe des natürlichen Logarithmus, ebenso das, was über die Zellenverteilung des Raumes mit Hilfe koncentrischer Cylinder gesagt ist. Auch das in Nr. 113 über das logarithmische Potential

$$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_1 + \cdots + m_n \lg r_n$$

beliebig verteilter Massenpunkte in der Ebene soll jetzt nicht noch einmal dargestellt werden.

156) **Aufgabe.** Mit welcher Kraft zieht die unbegrenzte Ebene einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Man denke sich Fig. 116 um den Radius MD ein wenig gedreht, so dafs l ein kleines „Rechteck“ $f = bl$, l_1 ein kleines Rechteck $f_1 = b_1 l_1$ giebt, wobei