Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

156) Anziehung der unbegrenzten Ebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Projektionsteilchen auf $A_1 B_1$ ist, so fällt die Resultante MC in die Linie MC_1, d. h. sie halbiert den Winkel und C teilt die Strecke AB im Verhältnis der Geraden AM und BM. Denkt man sich durch M eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B gelegt, so ist CM ihre Tangente. Dies gilt von jedem Punkte des Raumes. Die Kraftlinien für die Anziehung einer homogenen Strecke AB sind daher konfokale Hyperbeln, deren Drehung um AB entsprechende Hyperboloide giebt. Die Niveauflächen des Potentials sind also konfokale Drehungsellipsoide. Teilt man AB in gleiche Abschnitte, so erhält man wegen der Gleichheit der Belegung die gleichwertigen Kraftröhren dieses Problems. — Nimmt man statt AB die beiderseitigen Verlängerungen der Geraden bis ins Unendliche an Stelle der besprochenen Geraden selbt, so vertauschen die Kraft- und Niveaulinien ihre Rolle. Ist die Gerade nur einseitig begrenzt, so handelt es sich um zwei Orthogonalscharen konfokaler Parabeln, bezw. um die entsprechenden Paraboloide. Man könnte also schon an dieser Stelle den Übergang zu den elliptischen und parabolischen Koordinaten im Raume machen.

Man verwechsle aber das Problem der homogenen Geraden nicht mit dem der elektrischen Ladung einer Geraden, die unter keinen Umständen homogen wird, sondern infolge der gegenseitigen Abstofsungen eine Anhäufung nach den Endpunkten hin giebt. Auf diesen Punkt kommen wir noch zurück.]

155) Das Arbeitsdiagramm für die unbegrenzte Gerade und das logarithmische Potential. Man wiederhole an dieser Stelle das, was in Nr. 112 über die gleichseitige Hyperbel als Arbeitsdiagramm für die Entfernung eines Punktes von der homogenen, unbegrenzten Geraden und über die Berechnung des Flächeninhalts mit Hilfe des natürlichen Logarithmus, ebenso das, was über die Zellenverteilung des Raumes mit Hilfe koncentrischer Cylinder gesagt ist. Auch das in Nr. 113 über das logarithmische Potential

$$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_1 + \cdots + m_n \lg r_n$$

beliebig verteilter Massenpunkte in der Ebene soll jetzt nicht noch einmal dargestellt werden.

156) **Aufgabe.** Mit welcher Kraft zieht die unbegrenzte Ebene einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Man denke sich Fig. 116 um den Radius MD ein wenig gedreht, so dafs l ein kleines „Rechteck" $f = bl$, l_1 ein kleines Rechteck $f_1 = b_1 l_1$ giebt, wobei

$$\frac{b_1}{b} = \frac{C_1 D_1}{CD} = \frac{r}{\varrho}$$

ist. Während bei der dortigen Aufgabe $\frac{l}{\varrho^2} = \frac{l_1}{r^2}$ war, ist jetzt bei homogener Flächenbelegung ein Faktor $\frac{b}{b_1}$ oder $\frac{\varrho}{r}$ beizufügen, so dafs

$$\frac{bl}{\varrho^2} = \frac{b_1 l_1}{r^2} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

oder

$$\frac{f}{\varrho^2} = \frac{f_1}{r^2} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

wird. Die senkrechte Anziehungskomponente der Fläche f wird

$$\frac{f}{\varrho^2} \cdot \cos\vartheta = \frac{f}{\varrho^2} \cdot \frac{r}{\varrho} = \frac{f_1 \varrho}{r^3} \frac{r}{\varrho} = \frac{f_1}{r^2},$$

d. h. die Anziehung des Flächenteilchens f ist ebenso grofs, wie die des nach D versetzten Flächenteilchens f_1.

Dies gilt von jedem Teilchen der Grundfläche; die unbegrenzte homogene Ebene zieht also den Punkt M so an, als ob die homogene Belegung der Halbkugel in D koncentriert wäre. Die Massenbelegung der Halbkugel ist aber gleich $2r^2\pi$. Diese in D koncentrierte Masse übt auf die in M befindliche Einheit die Anziehung

$$\frac{2r^2\pi}{r^2} = 2\pi$$

aus, was von r unabhängig ist. Folglich:

Die mit der Dichte 1 homogen belegte unbegrenzte Ebene zieht die irgendwo im Raume befindliche Masseneinheit mit der konstanten Kraft 2π an.

157) Man wiederhole jetzt was in Nr. 114 über das sogenannte Planpotential und das Rechteck als Arbeitsdiagramm gesagt ist, ebenso die Bemerkungen in Nr. 114 und 104 über die Einteilung des Raums in Würfel durch zwei Scharen von Parallelebenen.

Es handelt sich dabei um das sogenannte homogene Feld. Jede kleine Raumzelle bei anderen Kraftlinien und Niveauflächen kann angenähert als homogenes Feld betrachtet werden. Dies gilt z. B. auch von der Anziehung der Erde in unmittelbarer Nähe ihrer Oberfläche, wo man sogar auf gröfsere Strecken hin die Kraftlinien der Schwere als Parallele betrachten darf. Man darf also hier an Stelle des Newtonschen Potentials das Planpotential setzen. Dies soll zunächst in Bezug auf die stationäre Strömung in einem Flusse geschehen.