Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

160) Ausdehnung der Analogien auf die Radialströmung in ebenen Platten

zu setzen. Man findet übrigens v_1 und h_1 durch Beobachtung, $A_2 K$ durch Berechnung aus $v_1 = \sqrt{2 g A_2 K}$, so dafs h_2 durch eine Subtraktion gefunden wird. Vgl. dazu Weisbach Ing. Mechanik u. s. w.]

Für unsere Zwecke reicht es aus, sich mit dem Diagramm AFA_1 zu beschäftigen. Die Druckdifferenzen entsprechen bestimmten Widerstandsarbeiten, sie veranschaulichen also Potentialdifferenzen.

Ganz ebenso sieht das Diagramm für die Potentialdifferenzen bei der elektrischen Strömung in einem homogenen Drahte aus, die bekanntlich dem Ohmschen Gesetze gehorcht. Auch dort werden die Potentialdifferenzen nur dazu verwandt, die Widerstände zu überwinden. Die Geschwindigkeiten werden dadurch nicht beeinflufst. Man vgl. dazu das in Nr. 54 Gesagte. Die Potentialdifferenzen sind hier proportional den Weglängen.

Ebenso ist es mit der Fortbewegung der Wärme in einer dünnen Platte von der Gestalt eines Parallelstreifens, dessen eines Ende auf der konstanten Temperatur t_1 gehalten wird, während das andere auf der niedrigeren t_n steht. Die Lote entsprechen den Temperaturen. Dasselbe gilt von der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Kanale von überall konstantem rechteckigen Querschnitt und dem zugehörigen Geschwindigkeitspotential. Mafsgebend ist für die passierende Menge überall der Ausdruck

$$\lambda F \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda F G = \lambda F \tan \alpha,$$

wo λ der Leitungs- oder Widerstandsfaktor, F der Querschnitt, w die Weglänge, $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz, G das Potentialgefälle ist. Die Geschwindigkeit selbst ist

$$v = \lambda \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda G = \lambda \tan \alpha,$$

während beim Newtonschen Anziehungsgesetz die Kraft

$$p = \varkappa \frac{V_2 - V_1}{w} = \varkappa G$$

war.

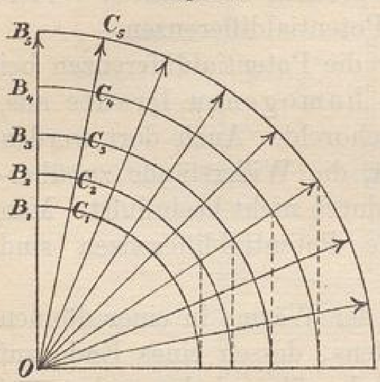
160) Ausdehnung der Analogien auf die Radialströmung in ebenen Platten.

Die Strömung erfolge jetzt in einer dünnen, überall gleich starken ebenen Platte, entweder von O aus nach allen Seiten hin, oder innerhalb eines Sektors OB_5C_5. Soll die Strömung stationär sein, so mufs durch die Bogen B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... u. s. w. dieselbe Menge passieren, d. h. die Geschwindigkeit mufs umgekehrt proportional dem Radius r sein, d. h. es ist

$$v_1 : v_n = r_n : r_1 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

oder, da die Geschwindigkeit proportional dem Gefälle $\tan\alpha$ angenommen wird (Nr. 155),

Fig. 119.



$$\tan\alpha_1 : \tan\alpha_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n}.$$

Das veränderliche Gefälle läfst sich also in der Form

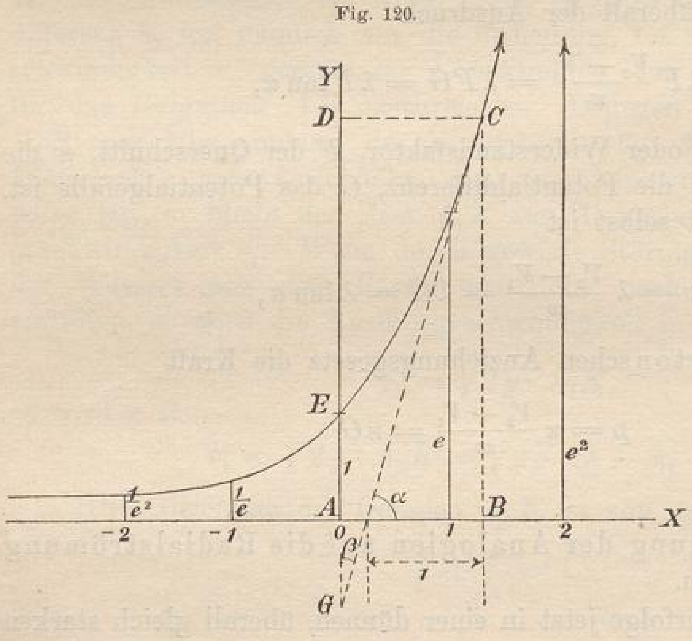
$$\tan\vartheta = c \cdot \frac{1}{r}$$

schreiben, oder, wenn man für ϑ den Supplementwinkel φ und $c = 1$ setzt,

$$\tan\varphi = -\frac{1}{r}.$$

Da man nach Nr. 112 auf das logarithmische Potential kommen mufs, steht zu vermuten, dafs diese Gleichung die einer logarithmischen Linie ist. Die Gleichung der letzteren in gewöhnlicher Lage ist $y = e^x$. Nach Ing.-Math. I Seite 150 ist in Fig. 120

Fig. 120.



$$\tan\alpha = \frac{BC}{1} \text{ oder}$$

$$\tan\alpha = e^x = y,$$

folglich

$$\tan\beta = \frac{1}{y}.$$

Betrachtet man also die positive Y-Achse als positive X-Achse, so ist die Gleichung der aufsteigenden logarithmischen Linie durch

$$\tan\beta = \frac{1}{x}$$

charakterisiert, die der absteigenden durch

$$\tan\varphi = -\frac{1}{x},$$

oder, wie oben des radialen Charakters wegen geschrieben ist, durch

$$\tan \varphi = -\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung läfst sich auch schreiben $r = e^{-y}$, oder $\frac{1}{r} = e^{y}$, oder endlich

$$y = -\overset{e}{\lg}\, r.$$

Die Höhe y hat wiederum die Bedeutung eines Potentials. Verschiebung und Vergröfserung verwandeln die Gleichung in

$$y = a - c \lg r.$$

Behält man die bei den oben angegebenen Analogien festgestellten Annahmen bei, so ergiebt sich folgendes:

Erweitert sich das Bett eines Flusses nach Art eines Kreissektors und soll seine Tiefe bei stationärer Strömung trotzdem überall gleich grofs bleiben, so mufs, da die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Radius ist, das Gefälle nach dem Gesetz einer logarithmischen Linie abnehmen, deren Gleichung durch

$$y = a - c \overset{e}{\lg}\, r$$

dargestellt wird.

Erweitert sich ebenso fächerförmig das horizontale Ableitungsrohr einer Wasserleitung bei überall gleicher Höhe, so werden die Wasserstandhöhen in den Druckröhren nach demselben Gesetz abnehmen.

Dasselbe gilt von den Werten des elektrischen Potentials für den Fall, dafs in einem Punkte (kleinem Kreise) in eine Platte Elektrizität eingeführt und an dem durch einen koncentrischen Kreis gebildeten Rande abgeleitet wird.

Dasselbe gilt von der ebenso eingeleiteten und abgeleiteten Wärme und den entsprechenden Temperaturen.

Weil das Gesetz ein logarithmisches ist, so gehören zu gleichen Potentialdifferenzen nicht etwa gleiche Wege, sondern einer arithmetischen Reihe von Potentialen entspricht eine geometrische Reihe von Abständen, und zwar nimmt die eine ab, wenn die andere zunimmt.

Kennt man demnach zwei Punkte der Kurve, so kann man beliebig viele Punkte elementar konstruieren.

161) Konstruktion der Potentialkurve für radiale Strömung aus zwei Punkten.

Auflösung. A_0 und A_1 seien die gegebenen Punkte. Man projiziere beide auf die Y-Achse, was D_0 und D_1 giebt. Den Abstand $D_0 D_1$