Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

161) Konstruktion der Potentialkurven für radiale Strömungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

$$\tan \varphi = -\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung läfst sich auch schreiben $r = e^{-y}$, oder $\frac{1}{r} = e^{y}$, oder endlich

$$y = -\overset{e}{\lg}\, r.$$

Die Höhe y hat wiederum die Bedeutung eines Potentials. Verschiebung und Vergröfserung verwandeln die Gleichung in

$$y = a - c \lg r.$$

Behält man die bei den oben angegebenen Analogien festgestellten Annahmen bei, so ergiebt sich folgendes:

Erweitert sich das Bett eines Flusses nach Art eines Kreissektors und soll seine Tiefe bei stationärer Strömung trotzdem überall gleich grofs bleiben, so mufs, da die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Radius ist, das Gefälle nach dem Gesetz einer logarithmischen Linie abnehmen, deren Gleichung durch

$$y = a - c \overset{e}{\lg}\, r$$

dargestellt wird.

Erweitert sich ebenso fächerförmig das horizontale Ableitungsrohr einer Wasserleitung bei überall gleicher Höhe, so werden die Wasserstandhöhen in den Druckröhren nach demselben Gesetz abnehmen.

Dasselbe gilt von den Werten des elektrischen Potentials für den Fall, dafs in einem Punkte (kleinem Kreise) in eine Platte Elektrizität eingeführt und an dem durch einen koncentrischen Kreis gebildeten Rande abgeleitet wird.

Dasselbe gilt von der ebenso eingeleiteten und abgeleiteten Wärme und den entsprechenden Temperaturen.

Weil das Gesetz ein logarithmisches ist, so gehören zu gleichen Potentialdifferenzen nicht etwa gleiche Wege, sondern einer arithmetischen Reihe von Potentialen entspricht eine geometrische Reihe von Abständen, und zwar nimmt die eine ab, wenn die andere zunimmt.

Kennt man demnach zwei Punkte der Kurve, so kann man beliebig viele Punkte elementar konstruieren.

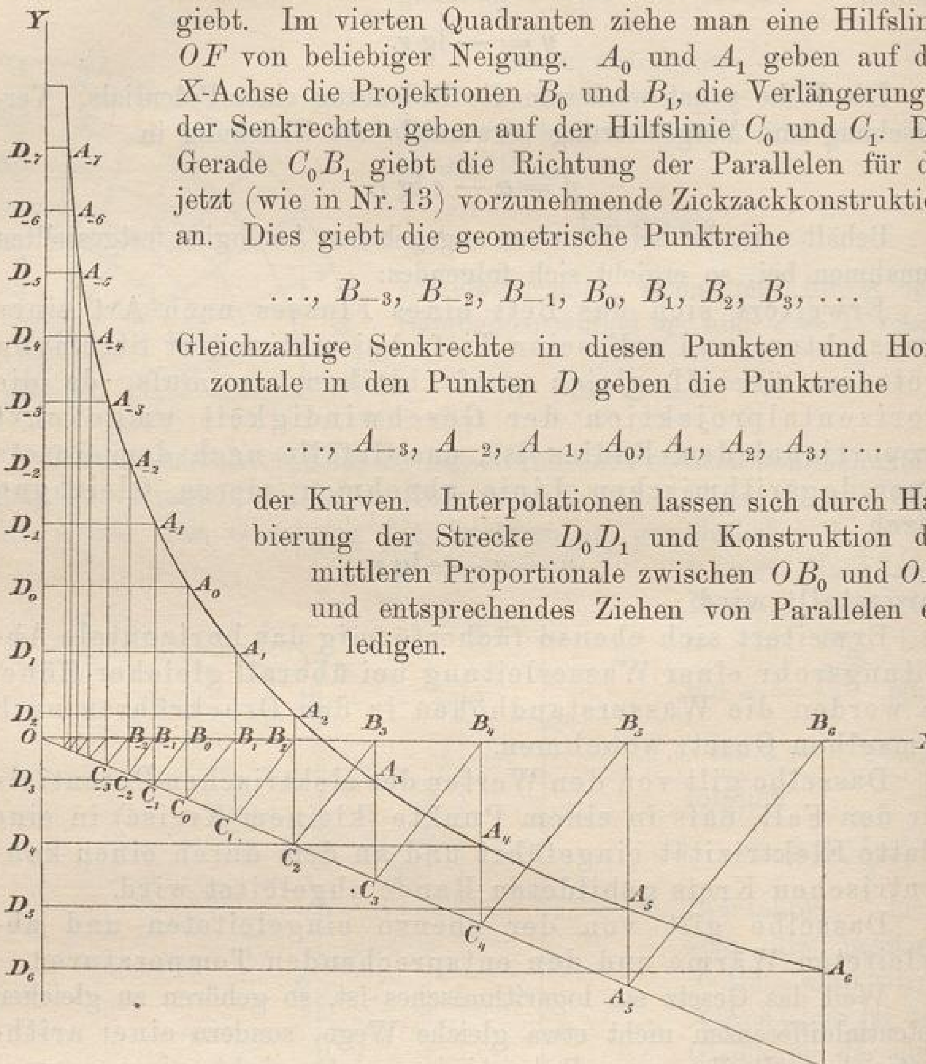
161) Konstruktion der Potentialkurve für radiale Strömung aus zwei Punkten.

Auflösung. A_0 und A_1 seien die gegebenen Punkte. Man projiziere beide auf die Y-Achse, was D_0 und D_1 giebt. Den Abstand $D_0 D_1$

trage man nach oben und unten beliebig oft ab, was eine arithmetische Punktreihe

$$-\ldots, D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3, \ldots$$

Fig. 121.



giebt. Im vierten Quadranten ziehe man eine Hilfslinie OF von beliebiger Neigung. A_0 und A_1 geben auf der X-Achse die Projektionen B_0 und B_1, die Verlängerungen der Senkrechten geben auf der Hilfslinie C_0 und C_1. Die Gerade C_0B_1 giebt die Richtung der Parallelen für die jetzt (wie in Nr. 13) vorzunehmende Zickzackkonstruktion an. Dies giebt die geometrische Punktreihe

$$\ldots, B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$$

Gleichzahlige Senkrechte in diesen Punkten und Horizontale in den Punkten D geben die Punktreihe

$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

der Kurven. Interpolationen lassen sich durch Halbierung der Strecke D_0D_1 und Konstruktion der mittleren Proportionale zwischen OB_0 und OB_1 und entsprechendes Ziehen von Parallelen erledigen.

Die Gleichung der Kurve mufs nach obigem von der Form

1) $$y = a - b \lg r$$

sein. Nun war gegeben

$$y_0 = B_0A_0,\ y_1 = B_1A_1,\ r_0 = D_0A_0,\ r_1 = D_1A_1.$$

Die Konstanten a und b sind also zu bestimmen aus

$$y_0 = a - b \lg r_0$$
$$y_1 = a - b \lg r_1.$$

Durch Subtraktion folgt

$$y_0 - y_1 = - b (\lg r_0 - \lg r_1),$$

es ist also

$$b = - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1},$$

demnach

$$a = y_0 + b \lg r_0 = y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0 = y_1 + b \lg r_1$$
$$= y_1 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r_1.$$

Dadurch ist die Gleichung 1) fest bestimmt. Sie lautet

2) $$y = \left(y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0\right) + \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r.$$

Statt y_0 und y_1 hat man beim Wärmeproblem die gegebenen Temperaturen T_0 und T_1 für Anfang und Ende einzusetzen. Die Temperatur für jede zwischen liegende Stelle ergiebt sich dann aus Gleichung 2). Dasselbe gilt von den Potentialwerten V_0 und V_1 für elektrische Strömung.

Das Gefälle an jeder Stelle ergiebt sich aus

$$G = - \frac{T_\alpha - T_\beta}{r_\alpha - r_\beta} = - \frac{(a - b \lg r_\alpha) - (a - b \lg r_\beta)}{r_\alpha - r_\beta} = b \frac{\lg r_\alpha - \lg r_\beta}{r_\alpha - r_\beta},$$

wo r_α und r_β benachbarte Werte sind, oder für die Grenze aus

$$G = b \frac{1}{r}.$$

Die durch die Querschnittseinheit sekundlich passierende Wärme ist also

$$W = \varkappa \cdot b \frac{1}{r},$$

wo $\varkappa$ der Leitungskoeffizient ist. Bei Metalldicke d geht durch jeden Kreis (vom Radius r) die konstante Menge

$$W = 2 r \pi d \varkappa b \cdot \frac{1}{r} = 2 \pi d \varkappa b.$$

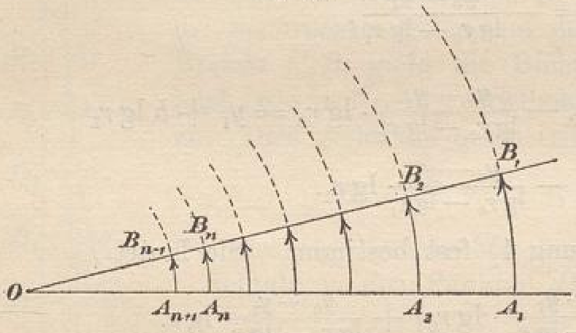
Dasselbe gilt von entsprechenden elektrischen Mengen E, nur ist dabei die Dicke der Platte als sehr klein anzunehmen. Hat man die Ebene in n Sektoren eingeteilt, so wandert durch jeden Sektorenquerschnitt, d. h. durch jede Quadratseite, die Wärmemenge

$$W = \frac{2\pi}{n} d \varkappa b.$$

Schon in Fig. 86b war die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige Zellen, d. h. in Quadrate gegeben.

162) Das Vertauschungsproblem der Radialströmung. Für das spätere ist folgende Bemerkung von besonderer Wichtigkeit. Bei der Einteilung der Ebene in gleiche Quadrate ist es gleichgültig, welche der beiden Parallelenscharen man als Stromlinien, welche man als Niveaulinien betrachte. Da man nun hier jedes kleine quadratische Flächenstück als wirkliches Quadrat betrachten kann, so muſs es gestattet sein, die Kreise als Stromlinien, die Geraden durch O als Niveaulinien zu betrachten. Denkt man sich z. B. bei kreisförmiger Platte den Radius OA_1 auf der Temperatur T_a, den Radius OB_1 auf der Temperatur T_b gehalten, so erhält aus Symmetriegründen die Winkelhalbierende die Temperatur $\frac{T_a + T_b}{2}$. Durch weitere Winkelhalbierung erhält man beliebig viele Isothermen, deren Temperaturen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Stellt man die Temperaturen durch Lote auf der Ebene dar, so entsteht eine Schraubenfläche einfachster Art.

Fig. 122.



Das Temperaturgefälle auf $A_1 B_1$ ist

$$G_1 = \frac{T_a - T_b}{w_1},$$

auf $A_2 B_2$ ist es

$$G_2 = \frac{T_a - T_b}{w_2},$$

es ist also

$$G_1 : G_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2},$$

d. h. das Gefälle ist wiederum umgekehrt proportional dem Radius. Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit $v = \varkappa G$ der Wärmeströmung oder der zum Vergleich herangezogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Nun ist aber bei unendlicher Kleinheit der Quadrate

$$\overline{A_1 A_2} : \overline{A_n A_{n+1}} = r_1 : r_n,$$

oben war

$$v_1 : v_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$