UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

162) Das Vertauschungsproblem der Radialströmung

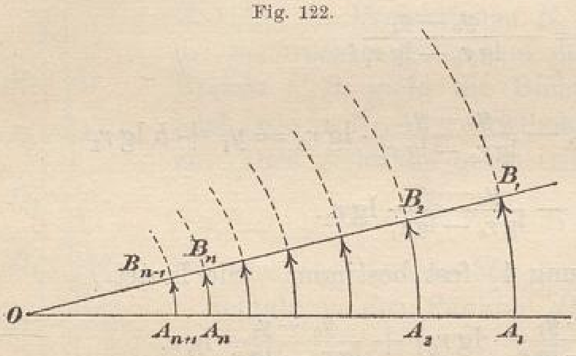
urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Visual Library

Schon in Fig. 86b war die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige Zellen, d. h. in Quadrate gegeben.

162) Das Vertauschungsproblem der Radialströmung. Für das spätere ist folgende Bemerkung von besonderer Wichtigkeit. Bei der Einteilung der Ebene in gleiche Quadrate ist es gleichgültig, welche der beiden Parallelenscharen man als Stromlinien, welche man als Niveaulinien betrachte. Da man nun hier jedes kleine quadratische Flächenstück als wirkliches Quadrat betrachten kann, so mufs es gestattet sein, die Kreise als Stromlinien, die Geraden durch O als Niveaulinien zu betrachten. Denkt man sich z. B. bei kreisförmiger Platte den Radius OA_1 auf der Temperatur T_a, den Radius OB_1 auf der Temperatur T_b gehalten, so erhält aus Symmetriegründen die Winkelhalbierende die Temperatur $\frac{T_a + T_b}{2}$. Durch weitere Winkelhalbierung erhält man beliebig viele Isothermen, deren Temperaturen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Stellt man die Temperaturen durch Lote auf der Ebene dar, so entsteht eine Schraubenfläche einfachster Art.

Fig. 122.



Das Temperaturgefälle auf $A_1 B_1$ ist

$$G_1 = \frac{T_a - T_b}{w_1},$$

auf $A_2 B_2$ ist es

$$G_2 = \frac{T_a - T_b}{w_2},$$

es ist also

$$G_1 : G_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2},$$

d. h. das Gefälle ist wiederum umgekehrt proportional dem Radius. Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit $v = \varkappa G$ der Wärmeströmung oder der zum Vergleich herangezogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Nun ist aber bei unendlicher Kleinheit der Quadrate

$$\overline{A_1 A_2} : \overline{A_n A_{n+1}} = r_1 : r_n,$$

oben war

$$v_1 : v_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

folglich ist

$$v_1 \cdot \overline{A_1 A_2} = v_n \cdot \overline{A_n A_{n+1}}.$$

Folglich: Durch alle Quadratseiten auf jedem Sektorenquerschnitt strömt sekundlich dieselbe Wärmemenge. Also ist die quadratische Einteilung auch für das Vertauschungsproblem eine potentiell gleichwertige.

Sind ferner T_α und T_β benachbarte Temperaturdifferenzen und der Abstand für die Entfernung r gleich $\frac{2r\pi}{n}$, wobei n sehr grofs ist, so ist das Gefälle nach obigem

$$G = \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = \frac{n}{2\pi} \cdot (T_\alpha - T_\beta)\frac{1}{r} = b\frac{1}{r},$$

die sekundlich überströmende Menge pro Flächeneinheit des Querschnitts also ist

$$W = \varkappa G = \varkappa b \frac{1}{r} = \varkappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}}.$$

Auf die Quadratbreite $\frac{2r\pi}{n}$ kommt also bei Dicke d der Platte die Menge

$$W = d\frac{2r\pi}{n} \cdot \varkappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = d\varkappa (T_\alpha - T_\beta) = \frac{2\pi d \varkappa b}{n},$$

was der Schlufsgleichung des vorigen Problems entspricht. Durch je n auf demselben Radius aufeinander folgende Quadratseiten strömt das n fache, also

$$W = 2\pi d \varkappa b,$$

und dies entspricht der Strömung durch jeden Vollkreis des vorigen Problems. Die Analogie ist also eine vollkommene.

In dieser Weise läfst sich zu jedem Problem ein Vertauschungsproblem aufstellen, bei dem die Strom- und Niveaulinien ihre Rollen wechseln.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN