



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

Kapitel X. Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

## Kapitel X.

### Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme.

163) **Aufgabe.** In eine unbegrenzte homogene Platte ströme in zwei Punkten  $M_1$  und  $M_2$  unter gleichen Umständen Elektrizität ein, während die Ableitung in unendlicher Entfernung erfolgt. Die Strom- und Niveaulinien sollen ermittelt werden.

**Auflösung.** Die Potentialwerte  $-c_1 \lg r_1$  und  $-c_1 \lg r_2$  sind nach Nr. 79 für jeden Punkt der Ebene algebraisch zu summieren, so daß es sich um

$$-c(\lg r_1 + \lg r_2) = -c_1 \lg(r_1 r_2)$$

handelt. Setzt man diesen Ausdruck gleich einer Konstanten  $\alpha$ , so erhält man als Gleichung der Niveaulinien  $-c_1 \lg(r_1 r_2) = \alpha$ , oder, wenn man  $-\frac{\alpha}{c_1} = c$  setzt

$$1) \quad \lg r_1 + \lg r_2 = c, \text{ oder } \lg(r_1 r_2) = c, \text{ oder } r_1 r_2 = e^c.$$

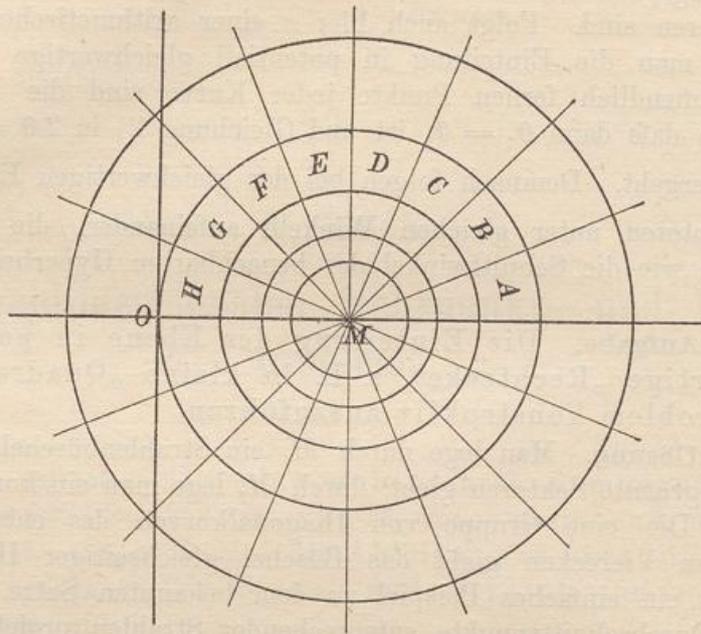
Läßt man  $e$  die Werte einer arithmetischen Reihe annehmen, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Ringstreifen. Es handelt sich um die in Ing.-Math. Bd. I behandelten lemniskatischen Kurven 2. Ordnung, deren Bedeutung für die Trägheits- und Centrifugalmomente (vgl. Nr. 142, 147, 218, 234, 238, 281) und für die mathematische Physik überhaupt bereits hervorgehoben worden ist. Dort war gezeigt (Nr. 234), daß die Orthogonalkurven dieser Schar ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bilden, deren Gleichung sich in der Form

$$2) \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = c$$

schreiben läßt, wo  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Neigungen der Vektoren  $r_1$  und  $r_2$  sind. Dies geht ohne weiteres aus dem in Nr. 162 dargestellten Vertauschungsprobleme hervor, für welches  $\vartheta_1 = c_1$  und  $\vartheta_2 = c_2$  die Bedeutung

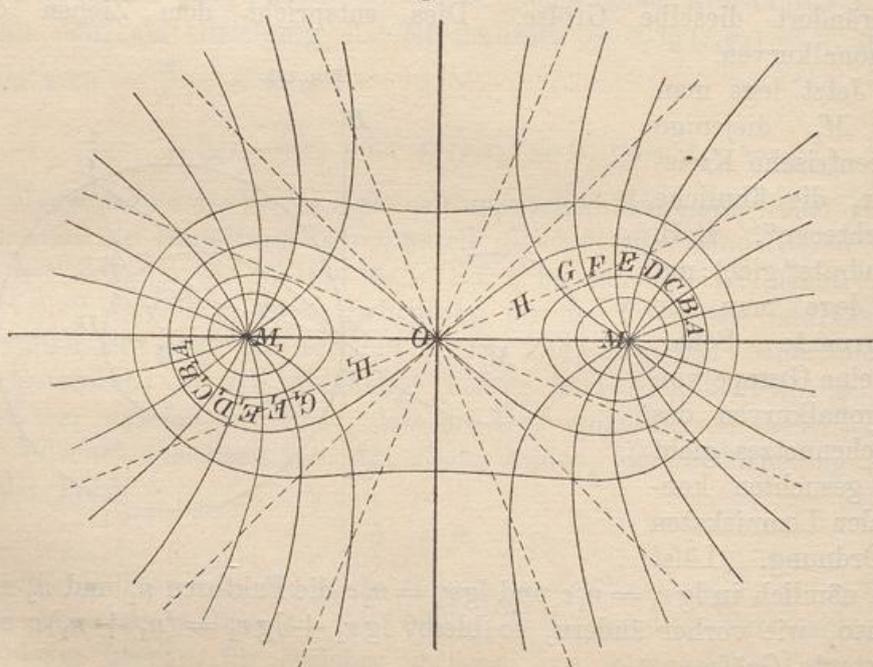


Fig. 124.



2. **Auflösung.** In Abschnitt VI von Ing.-Math. Bd. I ist die lemniskatische Abbildung durchgeführt, d. h. für jeden Vektor  $OC$  ist die Winkelhalbierende  $OP$  eingeschaltet, deren Länge  $= \sqrt{OM \cdot OC} = \sqrt{1 \cdot OC}$

Fig. 125.



d. h. gleich der mittleren Proportionale zwischen  $OM = 1$  und  $OC$  ist. Dort ist gezeigt, daß dadurch die quadratische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und konzentrische Kreisschar in die quadratische Einteilung durch Hyperbelbüschel und konfokale Lemniskatenschar erzielt wird. Der Beweis möge dort nachgesehen werden. Durch die in die Niveaulinien fallenden Quadratseiten gehen sekundlich gleiche Mengen von Elektrizität. An jeder Stelle der Fig. 125 sind die Abstände der Niveaulinien gleich den Querlinien der Kanäle. Die Figur giebt zugleich die Niveauflächen für das Anziehungsproblem zweier paralleler homogen mit Masse belegter unbegrenzter Geraden, wobei die Dichtigkeiten für beide übereinstimmen.

165) **Aufgabe.** Für einen Punkt einer der lemniskatischen Kurven die Normale, für das eben besprochene Anziehungsproblem die Resultante nach Gröfse und Richtung zu konstruieren.

**Auflösung.** Man könnte die bekannte Tangentenkonstruktion für die betreffende gleichseitige Hyperbel zu Hilfe nehmen. Dies soll hier aber nicht geschehen, vielmehr soll die Mechanik herangezogen werden. Nach Nr. 112 übt die Masse 1 in  $M_1$  auf  $P$  die Anziehung  $\frac{1}{r_1} = PA_1$  aus, die Masse 1 in  $M_2$  die Anziehung  $\frac{1}{r_2} = PA_2$ . Diese Strecken sind leicht zu konstruieren (mit Hilfe der Proportion  $r_1 : 1 = 1 : x$ ). Die Resultante  $PB$  in Fig. 126 muß senkrecht auf der Niveaulinie stehen, so daß die Richtung der Normalen gefunden ist. (Darin liegt ein leicht auszusprechender geometrischer Satz für die Hyperbeln und Lemniskaten.) Zugleich ist für das Anziehungsproblem die Länge der Resultante gefunden. Sie folgt aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2 \cos \gamma}{r_1 r_2} = \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4r^2}{r_1^2 r_2^2}$$

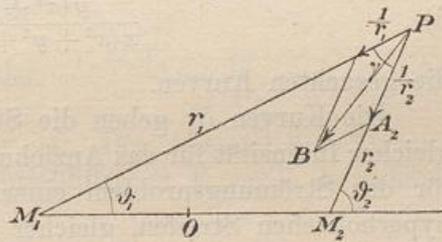
als

$$3) \quad p = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wobei  $r$  die Gerade  $OP$  ist.

Die Richtung der Resultante läßt sich mittels der Zerlegung der Einzelkräfte nach der senkrechten und wagerechten Richtung bequem ermitteln. Die Neigung  $\alpha$  gegen die X-Achse ergibt sich, wenn  $M_1$  und  $M_2$  als die Punkte  $x = \pm 1$  der X-Achse betrachtet werden, aus

Fig. 126.



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\frac{1}{r_1} \sin \vartheta_1 + \frac{1}{r_2} \sin \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} \cos \vartheta_1 + \frac{1}{r_2} \cos \vartheta_2} = \frac{\frac{r_1 \sin \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2 \sin \vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1 \cos \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2 \cos \vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} + \frac{x-1}{r_2^2}} \\ &= \frac{y(r_2^2 + r_1^2)}{x(r_2^2 + r_1^2) + (r_2^2 - r_1^2)}, \end{aligned}$$

oder, wenn man für  $r_2^2$  und  $r_1^2$  die Werte  $(x-1)^2 + y^2$  bzw.  $(x+1)^2 + y^2$  einsetzt,

$$4) \quad \tan \alpha = \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{x(x^2 + y^2 + 1) - 2xy}.$$

166) Linien gleicher Stromdichte und gleicher Stromrichtung für dieses Problem. Setzt man die Ausdrücke für  $p$  und  $\tan \alpha$  gleich konstanten Größen, so erhält man in

$$5) \quad \frac{2r}{r_1 r_2} = c$$

und

$$6) \quad \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{x(x^2 + y^2 + 1) - 2xy} = c$$

die gesuchten Kurven.

Die Kurven 5) geben die Stellen gleichen Potentialgefälles und gleicher Intensität für das Anziehungsproblem, gleicher Geschwindigkeit für das Strömungsproblem einer inkompressiblen Flüssigkeit in den hyperbolischen Streifen, gleicher Stromdichte für die stationäre Elektrizitäts- bzw. Wärmeströmung. Sie passieren Quadrate von gleicher Größe in der quadratischen Einteilung.

Die Kurven 6) verbinden die Punkte gleicher Stromrichtung bzw. gleicher Anziehungsrichtung miteinander. [Beiläufig sei bemerkt, daß ihre Gleichung sich auf  $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$  zurückführen läßt, wo  $\vartheta$  die Neigung des Vektors  $OP$  ist, und daß sie die Orthogonalschar zu den Kurven 5) geben.] Sie werden konstruiert, indem man in das System der Lemniskaten oder Hyperbeln eine Parallelschar legt und die Berührungspunkte verbindet.

167) Die Diagrammfläche des Problems. Denkt man sich auf der Ebene der Lemniskaten und Hyperbeln in jedem Punkte das Lot  $z = \lg(r_1 r_2) = \lg r_1 + \lg r_2$  errichtet, so erhält man die Diagrammfläche des Potentials. Die Projektionen der Niveaulinien und Steilungslinien sind die der Lemniskaten und Hyperbeln; die der Linien gleicher Steilheit (gleichen Gefälles) sind die Kurven 5), die der gleichen

Richtung der Projektion sind die Kurven 6). Folgen die Höhen  $z$  arithmetisch aufeinander, so durchschneiden die Kurven 5) die Stellen gleichen Abstandes  $w$  der Lemniskaten.

168) Das elektrische Strömungsproblem. Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\kappa \lg(r_1 r_2), \quad \delta = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda \kappa, \quad \kappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo  $E$  die sekundlich in jedem der Punkte  $M_1$  und  $M_2$  einströmende Elektrizitätsmenge ist.

Sind  $r_1$  und  $r_2$  bzw.  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Abstände zweier benachbarter Punkte einer Stromlinie, deren Abstand gleich  $w$  ist, so folgt aus der Gefällgleichung

$$G = \tan \alpha = \kappa \frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w}$$

und der Geschwindigkeitsgleichung  $v = \lambda \tan \alpha$  für die inkompressible Flüssigkeit, da zugleich

$$v = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda \kappa$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{V_2 - V_1}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wo  $r$  der von  $M$  ausgehende Vektor ist. Der Abstand der Niveaulinien für eine gegebene kleine Potentialdifferenz  $V_2 - V_1$  berechnet sich also für jede Stelle als

$$w = (V_2 - V_1) \frac{r_1 r_2}{2r}.$$

Dadurch sind die Quadratseiten für gegebene kleine Potentialdifferenz berechnet. Das Problem kann damit als erledigt betrachtet werden.

169) **Aufgabe.** In  $M_1$  und  $M_2$  strömen sekundlich gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten ein. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen.

**Auflösung.** Nach obigem erhalten die Niveaulinien die Gleichung

$$1) \quad \lg r_1 - \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad \lg \frac{r_1}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^c,$$

die Stromlinien die Gleichung

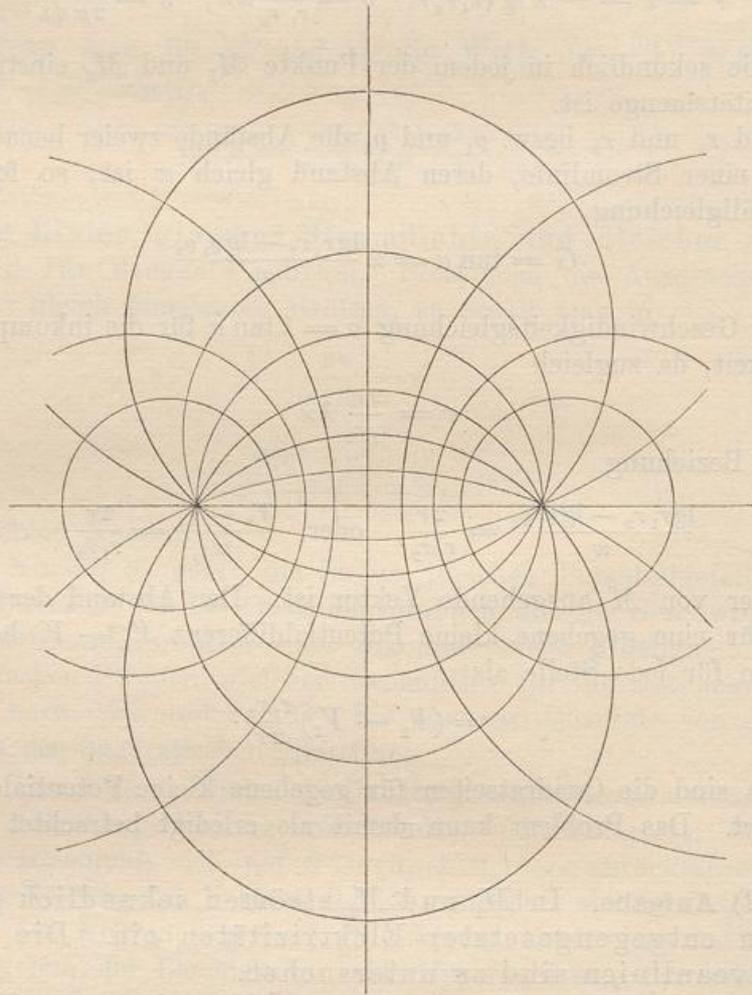
$$2) \quad \vartheta_2 - \vartheta_1 = c.$$

Der Faktor  $\kappa$  ist als unwesentlich weggelassen. Die Schar 1) ist eine Kreisschar, die Schar 2) ein Kreisbüschel durch  $M_1$  und  $M_2$ , beide

Scharen durchsetzen einander rechtwinklig. Nimmt  $c$  in beiden Gleichungen Werte an, die derselben arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung in kleine Quadrate.

Aus Figur 127 geht hervor, daß  $c$  für jeden Büschelkreis den konstanten Peripheriewinkel über  $M_1M_2$  bedeutet, der gleich dem

Fig. 127.



Winkel ist, unter dem die  $X$ -Achse geschnitten wird. Demnach bilden die Tangenten der Büschelkreise in  $M_1$  und  $M_2$  reguläre Strahlenbündel.

Konstruktiv kann man die Niveau- und Kraftlinien auf verschiedene Arten erhalten. Zunächst kann man beginnen wie beim vorigen Problem, nur hat man die andere Gruppe von Diagonalen in das Vierecksnetz einzuzeichnen. Eine zweite Art ist folgende: Man

denke sich das Quadratnetz der Strahlen und concentrischen Kreise gezeichnet, mache einen beliebigen Punkt der Ebene zum Inversionscentrum (Abbildung  $Z = \frac{1}{z}$ ), eine beliebige Länge wähle man als Einheit. Nach dem Method. Lehrbuch II Kap. IX gehen dabei die Kreise und die Strahlen in ein Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar über, und da die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt bleibt, entsteht die quadratische Einteilung.

Selbständig läßt sich das Büschel leicht konstruieren, sobald man weiß, daß die Tangenten in den Büschelpunkten unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Nimmt man neben der Symmetrielinie einen der Orthogonalkreise willkürlich an, so lassen sich die anderen mit Hilfe der Tangenten in den Schnittpunkten mit dem Büschel, welche Inversionscentren geben, leicht ableiten.

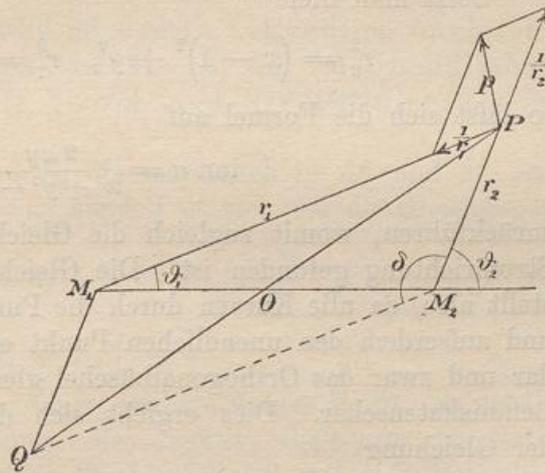
Der Übergang vom Strahlenbüschel und den concentrischen Kreisen zum Kreisbüschel und der orthogonalen Kreisschar giebt den Zusammenhang der Polarkarte mit den Karten der östlichen und westlichen Halbkugel nach der stereographischen Projektion von Hipparch-Ptolemäus. [Nimmt man dazu die Quadrateinteilung der Ebene durch Parallelenscharen, so erhält man den Zusammenhang mit der Merkatorkarte, der durch die Abbildung  $Z = \lg z$  gegeben wird.]

Zugleich ist das Newtonsche Anziehungs-Abstoßungsproblem gelöst für zwei unbegrenzte Gerade, von denen die eine mit anziehender, die andere mit abstoßender Masse homogen belegt ist.

170) **Aufgabe.** Die Resultante des letzteren Problems nach Größe und Richtung zu konstruieren und zu berechnen, ebenso die Linien gleicher Stromdichte und Stromrichtung.

**Auflösung.** Sieht man von der Konstanten ab, so handelt es sich für den Punkt  $P$  um die anziehende Kraft  $\frac{1}{r_1}$  und um die abstoßende Kraft  $\frac{1}{r_2}$ , die beide leicht zu konstruieren sind. Die Resultante ergibt sich nach Fig. 128 durch Zusammensetzung.

Fig. 128.



Die GröÙe der Resultante ergibt sich, wenn  $MM_2 = 1$  gesetzt wird, als

$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1 r_2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta}{r_1^2 r_2^2} = \frac{M_1 M_2^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4}{r_1^2 r_2^2},$$

so daÙ

$$p = \frac{2}{r_1 r_2}$$

ist. Die Linien gleicher Stromdichte haben also jetzt die Gleichung

$$\frac{2}{r_1 r_2} = \kappa$$

oder

$$r_1 r_2 = \frac{2}{\kappa} = c,$$

d. h. sie bilden ein System konfokaler Lemniskaten.

Die Richtung der Resultante ergibt sich nach dem früheren aus

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{r_1} \sin \vartheta_1 - \frac{1}{r_2} \sin \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} \cos \vartheta_1 - \frac{1}{r_2} \cos \vartheta_2} = \frac{\frac{r_1 \sin \vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2 \sin \vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1 \cos \vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2 \cos \vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} - \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y(r_2^2 - r_1^2)}{x(r_2^2 - r_1^2) + (r_2^2 + r_1^2)}.$$

Setzt man hier

$$r_2^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x+1)^2 + y^2,$$

so läÙt sich die Formel auf

$$\tan \alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1} = c$$

zurückführen, womit zugleich die Gleichung für die Linien gleicher Stromrichtung gefunden ist. Die Gleichung ist vom zweiten Grade, stellt also, da alle Kurven durch die Punkte  $\pm 1$  der X-Achse gehen und außerdem den unendlichen Punkt erreichen, ein Hyperbelbüschel dar und zwar das Orthogonalbüschel gleichwertiger Hyperbeln für die Lemniskatenschar. Dies ergibt sich durch folgende Umschreibung der Gleichung

$$\frac{[(x+1)+(x-1)]y}{(x+1)(x-1)-y^2} = \frac{\frac{y}{x-1} + \frac{y}{x+1}}{1 - \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1}} = \frac{\tan \vartheta_1 + \tan \vartheta_2}{1 - \tan \vartheta_1 \tan \vartheta_2} = \tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$$

oder auch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = c_1,$$

was nach Nr. 163 die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist.

Zieht man also in einem Kreisbüschel parallele Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Die Orthogonalkurven sind Lemniskaten 2<sup>ter</sup> Ordnung, und jede von ihnen durchschneidet bei der Quadranteilung der Ebene durch Kreisbüschel und Kreischar eine Reihe gleich großer Quadrate.

Errichtet man auf der Ebene in jedem Punkte ein Lot

$$\lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right) = \lg r_1 - \lg r_2,$$

so erhält man die Diagrammfläche des Problems, über die sich ähnliche Betrachtungen wie über die vorige anstellen lassen.

Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -x \lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right), \quad v = \frac{2}{r_1 r_2} \lambda x, \quad x = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo  $E$  die aus  $M_1$  sekundlich hervorquellende Elektrizitätsmenge bedeutet.

Dieses Problem ist das erste, an dem Kirchhoff seine bahnbrechenden Untersuchungen über die stationäre Strömung in ebenen Platten theoretisch und experimentell prüfend durchgeführt hat. (Vgl. Poggendorfs Annalen, Bd. 64 u. 67 und die Vorlesungen Kirchhoffs über Elektrizität und Magnetismus Seite 135.)

171) **Aufgabe.** In  $M_1$  und  $M_2$  treten sekundlich ungleiche Mengen gleichartiger Elektrizität ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien u. s. w. sind zu untersuchen.

**Auflösung.** Sind  $E_1$  und  $E_2$  die sekundlich in  $M_1$  und  $M_2$  eintretenden Elektrizitätsmengen, so handelt es sich um die Gleichungen

$$1) \quad E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} = c^c$$

und

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 = c.$$

Folgen die Werte von  $c$  einer arithmetischen Reihe, so erhält man die quadratische Einteilung. Konstruktiv erhält man das Netz, indem man in  $M_1$  ein reguläres Strahlenbüschel von  $nE_1$  Sektoren, in  $M_2$  ein solches von  $nE_2$  Sektoren zeichnet, die eine Größe von Diagonalkurven des Netzes giebt die Stromlinien 2), deren Gleichung daraus sofort als richtig erhellt. Dasselbe macht man mit den

quadratisch teilenden konzentrischen Kreisen der beiden Büschel, was nach Form und Gleichung auf die Kurven 1) führt. Über die Diagrammfläche, ebenso über die Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung lassen sich dieselben Betrachtungen wie vorher anstellen, nur werden die Resultate weniger einfach. Die Zeichnung für den Fall  $E_1 : E_2 = 2 : 1$  erinnert an Fig. 72.

Die Stromlinien haben Asymptoten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen und durch den Schwerpunkt der „Massen“  $E_1$  und  $E_2$  gehen. Zwei dieser Asymptoten teilen den Winkel  $M_2 M M_1$  im Verhältnis  $E_2 : E_1$ . Die zugehörigen Stromlinien grenzen die beiden Ausströmungsbereiche voneinander ab. Zu den Niveaulinien gehört ein unendlich großer Kreis um den Schwerpunkt. [Auf die Transformation, welche das Strahlenbüschel und die konzentrische Kreisschar direkt in die vorliegenden Kurvenscharen verwandelt, kann hier nicht eingegangen werden. Dazu vergleiche man Kapitel X der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.]

172) **Aufgabe.** In  $M_1$  ströme die Elektrizitätsmenge  $E_1$  ein, der Teil  $E_2$  werde in  $M_2$  abgeleitet, der Rest fließe ins Unendliche ab. Die Niveau- und Stromlinien sind zu untersuchen.

**Auflösung.** Konstruktiv beginnt man wie vorher, nur nimmt man die andere Diagonalengruppe. Dies und die Potentialüberlegung führt auf die Niveaulinien

$$1) \quad E_1 \lg r_1 - E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{-E_2} = e^c.$$

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 - E_2 \vartheta_2 = c.$$

Die Zeichnung für  $E_1 : E_2 = 2 : 1$  erinnert an Fig. 76. Die Arme der sich selbst schneidenden Kurven schneiden einander rechtwinklig.

173) **Aufgabe.** In drei beliebig liegenden Punkten der Ebene werde Elektrizität in den sekundlichen Mengen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  eingeführt, im Unendlichen abgeleitet. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

**Auflösung.** Man bilde zunächst die Stromlinien für  $E_1$  und  $E_2$  und zwar soll die Zahl der Streifen für  $M_1$  gleich  $nE_1$ , für  $M_2$  gleich  $nE_2$  sein. Darauf bilde man das regelrechte Strahlenbüschel für  $M_3$  mit  $nE_3$  Streifen. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Maschennetzes giebt die gesuchten Stromlinien. Darauf bilde man für  $M_1$  und  $M_2$  die quadratisch einteilenden Niveaulinien, für  $M_3$  die quadratisch einteilenden konzentrischen Kreise und verfare damit ebenso.

Die Gleichungen werden

$$1) \quad E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 + E_3 \lg r_3 = c,$$

oder

$$1*) \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{E_3} = e^c.$$

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 + E_3 \vartheta_3 = c.$$

Die Asymptoten folgen unter gleichen Winkeln aufeinander und gehen durch den Schwerpunkt  $S$  der „Massen“  $E_1, E_2, E_3$ . Jedem Punkte kommt ein Bereich der Ebene zu. Der unendlich große Kreis wird durch die trennenden Kurven bzw. ihre Asymptoten in Bereiche eingeteilt, die sich verhalten wie  $E_1 : E_2 : E_3$ . Dies erleichtert die Zeichnung der Kurven. Die Tangenten in  $M_1, M_2, M_3$  bilden regelmäßige Strahlenbüschel mit  $nE_1, nE_2, nE_3$  Streifen.

174) **Aufgabe.** In  $M_1$  und  $M_2$  werde sekundlich die Strommenge  $E_1$  und  $E_2$  eingeleitet, in  $M_3$  werde der Teil  $E_3$ , der Rest im Unendlichen abgeleitet. Das Stromnetz soll untersucht werden.

**Auflösung.** Konstruktiv beginnt man wie vorher, nur nimmt man jedesmal die andere Gruppe von Diagonalkurven. Die Gleichungen werden

$$1) \quad E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 - E_3 \lg r_3 = c,$$

oder

$$1*) \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{-E_3} = e^c.$$

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 - E_3 \vartheta_3 = c.$$

Von den  $n(E_1 + E_2)$  Stromlinien, die von  $M_1$  ausgehen, wandern  $nE_3$  nach  $M_3$ , der Rest von  $n(E_1 + E_2 - E_3)$  geht nach dem unendlichen Bereiche. Die Asymptoten der letzteren folgen unter gleichen Winkeln aufeinander und gehen durch den Schwerpunkt der Massen  $E_1, E_2$  und  $-E_3$ , der mit Hilfe entsprechender Kräfte leicht konstruiert wird.

Ist  $E_1 + E_2 - E_3 = 0$ , so fließt keine Elektrizität ins Unendliche ab, und alle Stromlinien, die von  $M_1$  und  $M_2$  ausgehen, treffen sich in  $M_3$ . Die Tangenten der Stromlinien in  $M_1, M_2, M_3$  bilden regelmäßige Strahlenbüschel mit  $nE_1, nE_2, nE_3$  Streifen.

175) **Aufgabe.** In beliebigen Punkten  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  der Ebene strömen sekundlich die gleichartigen elektrischen Mengen  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

**Auflösung.** Die Gleichungen werden nach obigem

$$1) \quad E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 + \dots + E_n \lg r_n = c,$$

oder

$$1*) \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{E_3} \dots r_n^{E_n} = c^c,$$

bezw.

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 + \dots + E_n \vartheta_n = c.$$

Der konstruktive Weg ist umständlich, bietet aber keine Schwierigkeiten. Man konstruiert nach Nr. 173 das Netz für drei Punkte, nimmt das Strahlenbüschel bzw. die konzentrische Kreisschar des vierten, dazu bildet man die Diagonalkurven. Dann wird der fünfte Punkt dazugezogen. Die Asymptoten der Stromlinien gehen durch den Schwerpunkt und folgen unter gleichen Winkeln aufeinander. Von der Streifenanzahl gilt dasselbe, wie vorher.

176) **Aufgabe.** In den Punkten  $M_1, M_2, M_3 \dots M_n$  mögen die Strommengen  $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$  eingeleitet, in den Punkten  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots \mathfrak{M}_v$  die Mengen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_v$  abgeleitet werden, der Rest soll ins Unendliche abfließen. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

**Auflösung.** Die Gleichungen werden

$$1) \quad e_1 \lg r_1 + e_2 \lg r_2 + \dots + e_n \lg r_n - [\varepsilon_1 \lg \varrho_1 + \varepsilon_2 \lg \varrho_2 + \dots + \varepsilon_v \lg \varrho_v] = c.$$

oder

$$1*) \quad \frac{r_1^{e_1} r_2^{e_2} \dots r_n^{e_n}}{\varrho_1^{\varepsilon_1} \varrho_2^{\varepsilon_2} \dots \varrho_v^{\varepsilon_v}} = c^c.$$

Konstruktiv verfährt man wie vorher, nur ist bei Heranziehung der negativen Ströme die andere Diagonalgruppe zu wählen. Die Stromlinien sind

$$2) \quad e_1 \vartheta_1 + e_2 \vartheta_2 + \dots + e_n \vartheta_n - [\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2 + \dots + \varepsilon_v \varphi_v] = c.$$

Die Asymptoten der Stromlinien gehen durch den Schwerpunkt der teils positiven, teils negativen Massen und folgen unter gleichen Winkeln aufeinander. Von der Streifenanzahl für die einzelnen Punkte gilt dasselbe wie vorher. Ist die Summe der positiven und negativen Strommengen gleich Null, so geht nichts ins Unendliche, also sind unter den Stromlinien im allgemeinen keine asymptotischen. Nur gewisse Grenzkurven sind auszunehmen.

Als allgemeine Form der Niveau- und Stromlinien kann man einfacher schreiben

$$\text{I)} \quad r_1^{e_1} r_2^{e_2} \dots r_n^{e_n} = c^c,$$

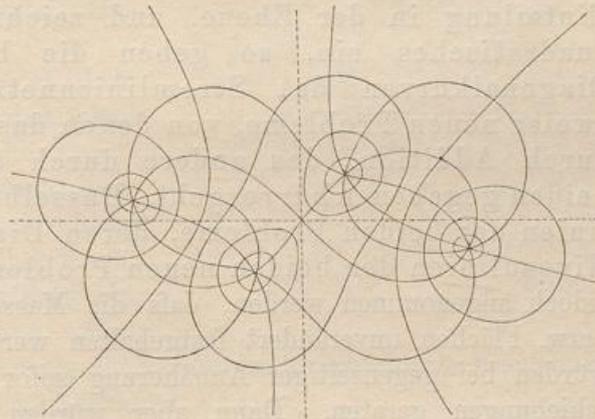
$$\text{II)} \quad e_1 \vartheta_1 + e_2 \vartheta_2 + \dots + e_n \vartheta_n = c,$$

wo die  $e$  teils positiv, teils negativ aufzufassen sind.

Damit sind die Punktprobleme für das logarithmische Potential erledigt.

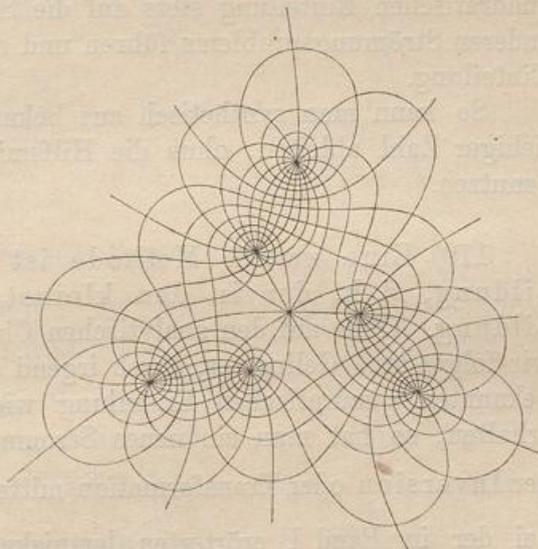
[In Kap. X und XI der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften ist gezeigt, wie man durch eine einfache Transformation direkt vom Parallelen- oder vom Einpunktproblem zu diesem allgemeinsten Punktproblem übergehen kann.]

Fig. 129.



177) Einige Beispiele. Um einen Begriff von den hier auftretenden Kurvensystemen zu erhalten, vergleiche man die beiden beistehenden Figuren, die der Theorie der isogonalen Verwandtschaften des Verfassers entnommen sind. Bei beiden handelt es sich um gleiche Mengen einströmender und abgeleiteter Elektrizität in vier bzw. sechs Punkten, so daß ein Abströmen ins Unendliche nicht stattfindet. Beide Zeichnungen erläutern sich selbst. An beiden läßt sich auch das Verhalten der durch Erdleitung vermittelten Rückströmungen beim Telegraphieren erläutern. Man nehme an, die drei inneren Büschelpunkte seien Telegraphenstationen, die gleichzeitig nach den drei äußeren telegraphieren. Unter Voraussetzung homogenen Erdreichs stellt dann die Zeichnung die entstehenden Rückströme dar, wobei zu beachten

Fig. 130.



ist, daß jede Station nicht die ganze von ihr ausgehende Elektrizität zurück erhält, sondern nur einen Teil davon, wogegen sie den Rest anderswoher erhält.

178) Eine allgemeine Methode zur Herstellung isothermischer Einteilungen. Aus obigem ergibt sich ganz allgemein folgendes: Hat man ein Strömungsnetz mit quadratischer Einteilung in der Ebene, und zeichnet man ein zweites quadratisches ein, so geben die beiden Gruppen von Diagonalkurven des Stromliniennetzes die Stromlinien zweier neuen Probleme, von denen das eine gewissermaßen durch Addition, das andere durch Subtraktion aus den beiden gegebenen hervorgeht. Dasselbe gilt von den Niveaulinien der beiden Probleme, deren Diagonalkurven auf die Niveaulinien der beiden neuen Probleme führen. Dabei muß jedoch angenommen werden, daß die Massenbelegungen der Linien bzw. Flächen unverändert festgehalten werden. Elektrizitäten z. B. würden bei gegenseitiger Annäherung sofort durch Influenz in Verschiebungen geraten. Dann aber würden die gefundenen Linien nicht mehr das Stromnetz des neuen Problems, sondern das eines gewissen anderen geben. Bei Punktproblemen tritt die genannte Störung nicht ein.

Ein besonderer Fall liegt darin, daß die Diagonalkurven einer quadratischen Einteilung stets auf die Strom- und Niveaulinien eines anderen Strömungsproblems führen und zwar ebenfalls in quadratischer Einteilung.

So kann man synthetisch aus bekannten Problemen neue in beliebiger Zahl ableiten, ohne die Hilfsmittel der höheren Analysis zu benutzen.

179) Eine zweite Methode ist die der konformen Abbildung, d. h. der in den kleinsten Teilen ähnlichen Abbildung. Ohne auf den analytischen Charakter einzugehen, bemerken wir folgendes. Gelingt es, durch irgend eine Transformation aus einer bekannten quadratischen Einteilung wiederum eine quadratische zu erhalten, so hat man ein neues Stromnetz. Dies geschieht z. B. bei der Inversion oder Transformation mittels reziproker Radien,  $Z = \frac{1}{z}$ , bei der in Band I erörterten lemniskatischen Abbildung  $Z = \sqrt{z}$ , bei der in Nr. 115 behandelten logarithmischen Abbildung. Die Inversion verwandelt die Parallelenschar in ein System sich berührender Kreise und die orthogonale Kreisschar, das Strahlenbüschel nebst konzentrischer Kreisschar in das Kreisbüschel nebst orthogonaler

Kreisschar. Die lemniskatische Abbildung verwandelt das Strahlenbündel nebst konzentrischer Kreisschar in das Bündel gleichseitiger Hyperbeln nebst konfokaler Lemniskatenschar, das Kreisbündel nebst orthogonaler Kreisschar in das in Fig. 129 dargestellte Lemniskatenbündel nebst orthogonaler Lemniskatenschar, die Parallelenschar in Scharen gleichseitiger Hyperbeln.

Die Abbildung  $Z = z^2$ , d. h. die Umkehrung der lemniskatischen Abbildung verwandelt die Parallelenschar in ein System konfokaler Parabeln, das Strahlenbündel nebst konzentrischer Kreisschar in ein Bündel von Parabeln nebst kardioidischer Schar. Man kann diese Transformation als die kardioidische Abbildung bezeichnen. (Vergl. Ing.-Math. Band I, Abschnitt VI.)

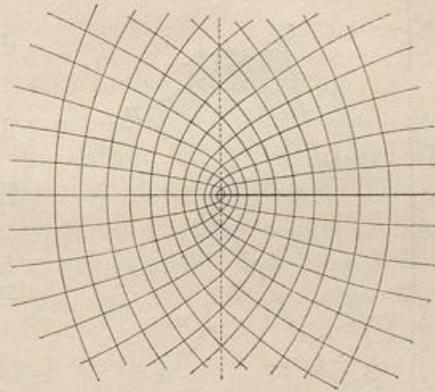


Fig. 131.

180) Die Abbildung  $Z = z^3$  ist entsprechend zu behandeln. Ist  $OA = 1$  und  $OA_1 = r_1$  eine beliebige Strecke, so vollende man Dreieck  $OAA_1$  und setze darauf ein ähnliches  $OA_1A_2$ , darauf wiederum ein ähnliches  $OA_2A_3$ . Dann ist

$$OA_2 = r_1^2, \quad OA_3 = r_1^3,$$

zugleich ist

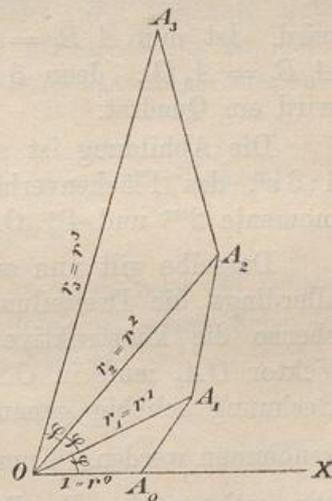
$$\sphericalangle AOA_3 = 3 \cdot \sphericalangle AOA_1.$$

Dies entspricht der Moivreschen Formel

$$\begin{aligned} [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 \\ = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Man nennt die Strecke  $OA_3$  (Strecke ist die nach Länge und Richtung bestimmte Gerade) die dritte Potenz der Strecke  $OA_1$ . So kann man zu jedem Punkte  $A_1$  den zugehörigen  $A_3$  finden. Konzentrische Kreise um  $O$  gehen dabei wieder in solche über, Strahlen durch  $O$  wieder in Strahlen durch  $O$ . Kurven  $f(R, \Phi) = 0$  gehen über in Kurven  $f(r^n, n\varphi) = 0$ , Kurven  $f(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}) = 0$  in Kurven  $f(r, \varphi) = 0$ .

Fig. 132.



Der quadratische Charakter der Einteilung mittels Strahlenbündel und konzentrischer Kreisschar bleibt erhalten. Das „Quadrat“

$A_1 B_1 C_1 D_1$  verwandelt sich in einen „Rechtecksraum“  $A_3 B_3 C_3 D_3$ . Dabei sei

$$OA_1 = r, \quad A_1 D_1 = r\alpha,$$

dann wird

$$OA_3 = r^3, \quad A_3 D_3 = 3r^3\alpha,$$

d. h.

$$A_3 D_3 = 3r^2 \cdot A_1 D_1.$$

Ist nun

$$A_1 B_1 = d \quad \text{also} \quad OB_1 = r + d,$$

so wird

$$OB_3 = (r + d)^3$$

$$= r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3,$$

also

$$A_3 B_3 = OB_3 - OA_3$$

$$= (r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3) - r^3$$

$$= 3r^2d + 3rd^2 + d^3.$$

Ist nun  $d$  sehr klein, so kann man  $3rd^2 + d^3$  als unendlich klein 2<sup>ter</sup> bzw. 3<sup>ter</sup> Ordnung gegen  $3r^2d$  vernachlässigen, so daß

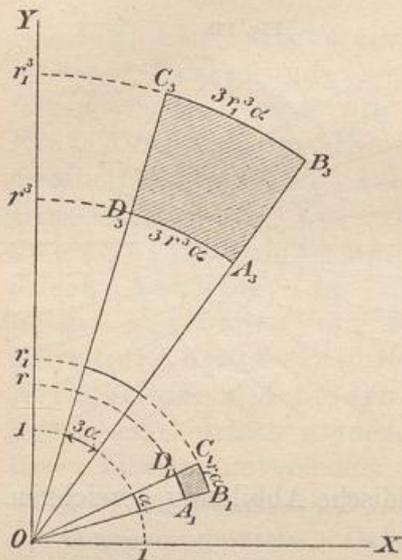
$$A_3 B_3 = 3r^2d = 3r^2 \cdot A_1 B_1$$

wird. Ist nun  $A_1 B_1 = A_1 D_1$  d. h.  $A_1 B_1 C_1 D_1$  ein Quadrat, so wird  $A_3 B_3 = A_3 D_3$ , (denn  $3r^2 \cdot A_1 B_1 = 3r^2 A_1 D_1$ ), d. h. auch  $A_3 B_3 C_3 D_3$  wird ein Quadrat.

Die Abbildung ist also eine konforme. Das Bogenverhältnis ist  $1:3r^2$ , das Flächenverhältnis  $1:9r^4$ . Die Folgerungen für Polarmomente 2<sup>ter</sup> und 4<sup>ter</sup> Ordnung liegen auf der Hand.

Dasselbe gilt nun auch von ihrer Umkehrung  $Z = \sqrt[3]{z}$ , bei der allerdings die Dreiteilung des Winkels vorausgesetzt werden muß, ebenso die konstruktive Darstellung der dritten Wurzel, denn der Vektor  $OA_3$  muß in  $OA_1$  verwandelt werden. Da dies mit Hilfe der Rechnung beliebig genau geschehen kann, soll diese Möglichkeit angenommen werden. Kurven  $f(r, \varphi) = 0$  gehen über in  $f(\sqrt[3]{r}, \frac{\varphi}{3}) = 0$ . Die orthogonalen Parallelscharen verwandeln sich in orthogonale Hyperbelscharen 3<sup>ter</sup> Ordnung, das Strahlenbündel und die konzentrische Kreisschar um einen beliebigen Punkt in ein Hyperbelbündel 3<sup>ter</sup> Ordnung nebst Lemniskatenschar 3<sup>ter</sup> Ordnung, wobei die 3 Brennpunkte (Wurzelpunkte) auf einem Kreise liegen und ein gleichseitiges

Fig. 133.



Dreieck bilden; das Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar gehen über in das Büschel der Lemniskaten 3<sup>ter</sup> Ordnung nebst Orthogonal-schar, welches in Fig. 130 dargestellt ist, u. s. w. So erhält man weitere Strömungsprobleme und kann ebenso zu  $Z = z^n$  und  $Z = \sqrt[n]{z}$  übergehen.

### 181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die schon in Nr. 115 behandelte logarithmische Transformation, die darauf beruht, daß man an Stelle von  $X = a$  einsetzt  $\lg r = a$  oder  $r = e^a$ , an Stelle von  $Y = b$  dagegen den Bogen  $\vartheta = b$ . Dadurch wird die Parallelenschar in das System konzentrischer Kreise nebst Radien verwandelt. Aus  $X_1 = a + d$  wird  $\lg r_1 = a + d$ , so daß  $r_1 = e^{a+d}$  wird, aus  $X_1 - X = d$  also wird

$$\lg r_1 - \lg r = d \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r} = e^d,$$

so daß

$$\begin{aligned} r_1 = r e^d \quad \text{und} \quad r_1 - r &= r(e^d - 1) = r \left( 1 + \frac{d}{1} + \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \dots - 1 \right) \\ &= r d \left( 1 + \frac{d}{1 \cdot 2} + \frac{d^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) \end{aligned}$$

wird. Für unendlich kleines  $d$  wird also die eine Rechtecksseite gleich  $rd$ . Aus  $Y_1 = b + d$  ergibt sich  $\vartheta_1 = b + d$ , aus  $Y_1 - Y = d$  also  $\vartheta_1 - \vartheta = d$ , für den Radius  $r$  also ebenfalls  $rd$ . Demnach geht ein kleines Quadrat in ein kleines Quadrat über. Damit ist auch dieser Übergang auf eine Transformation zurückgeführt, die mit der Formel

$$\begin{aligned} X + Yi &= \lg [r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] = \lg r + \lg(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= \lg r + \lg e^{\vartheta i} = \lg r + \vartheta i \end{aligned}$$

zusammenhängt, wobei  $X = \lg r$  und  $Y = \vartheta$  wird, da man die reellen Teile und ebenso die imaginären einander gleich zu setzen hat. In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurven:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f(X, Y) = 0$	$\begin{cases} f(\lg r, \vartheta) = 0 \\ \text{oder } f\left(\lg \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right) = 0. \end{cases}$
2) $f(e^X, Y) = 0$	$\begin{cases} f(r, \vartheta) = 0 \\ \text{oder } f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right) = 0. \end{cases}$

Z-Ebene.

z-Ebene.

$$\begin{array}{l}
 3) f(e^X, e^Y) = 0 \\
 4) f(e^X \cos Y, e^X \sin Y) = 0 \\
 5) f(R, \Theta) = 0
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 f(r, e^\vartheta) = 0 \\
 \text{oder } f(\sqrt{x^2 + y^2}, e^{\arctan \frac{y}{x}}) = 0. \\
 f(xy) = 0. \\
 f[\sqrt{(\lg r)^2 + \vartheta^2}, \arctan \frac{\vartheta}{\lg r}] = 0.
 \end{array}
 \right.$$

Aus der umgekehrten Abbildung

$$x + yi = e^{X+Yi} = e^X \cdot e^{Yi} = e^X (\cos Y + i \sin Y)$$

folgt nämlich

$$x = e^X \cos Y, \quad y = e^X \sin Y.$$

Außerdem ist nach 1)

$$R^2 = X^2 + Y^2 = (\lg r)^2 + \vartheta^2, \quad \Theta = \arctan \frac{Y}{X} = \arctan \frac{\vartheta}{\lg r}.$$

Dadurch ist man imstande, aus jeder beliebigen Kurvenschar der einen Ebene die entsprechende der anderen leicht abzuleiten.

182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung. Das Kreisbüschel durch die Punkte  $x = 0$  und  $x = +a$  auf der  $x$ -Achse der  $z$ -Ebene soll durch die Abbildung  $Z = \lg z$  in die  $Z$ -Ebene übertragen werden. Dasselbe soll mit der orthogonalen Kreisschar geschehen.

Das Kreisbüschel hat die Gleichung

$$\vartheta_1 - \vartheta = c \quad \text{oder} \quad \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x} = c.$$

Die linke Seite läßt sich schreiben

$$\arctan \left( \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x}} \right) = \arctan \frac{a}{x^2 - ax + y^2} = \arctan \frac{a}{r^2 - ar \cos \vartheta}$$

Die Gleichung

$$\arctan \frac{a}{r^2 - ar \cos \vartheta} = c \quad \text{oder} \quad \frac{a}{r^2 - ar \cos \vartheta} = \tan c$$

geht über in

$$1) \quad \frac{a}{e^{2X} - ae^X \cos Y} = \tan c \quad \text{oder} \quad \arctan \frac{a}{e^{2X} - ae^X \cos Y} = c.$$

Die Kreisschar hat die Gleichung

$$\frac{r}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$

oder endlich

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2}} = e^c.$$

Sie geht über in

$$2) \quad \frac{e^X}{\sqrt{e^{2X} - 2ae^X \cos Y + a^2}} = e^c$$

oder durch Logarithmierung in

$$2^*) \quad \lg e^X - \frac{1}{2} \lg [e^{2X} - 2ae^X \cos Y + a^2] = c.$$

Eine beliebig genaue Konstruktion der Kurven ergibt sich folgendermaßen. Man denke sich nach Fig. 85 die  $z$ -Ebene durch Polarkoordinaten, die  $Z$ -Ebene durch gewöhnliche Parallelscharen in Quadrate eingeteilt. In der  $z$ -Ebene zeichne man die quadratische Einteilung durch Kreisbüschel und orthogonale Kreisschar mit den Grundpunkten  $x = 0$  und  $x = +a$  der  $X$ -Achse mit anderer Farbe z. B. rot ein. Ist die ursprüngliche Teilung klein genug gewählt, so kann man die rote Zeichnung innerhalb jedes kleinen Quadrates der  $z$ -Ebene in das entsprechende Quadrat der  $Z$ -Ebene geometrisch ähnlich eintragen. In Fig. 134 ist das entstehende Gebilde dargestellt. Die Figur ist symmetrisch gegen  $AB$ ,  $A_1B_1$  und  $CD$  nach oben und unten fortzusetzen, so daß unendlich viele Parallelstreifen entstehen. Die durch  $E$  und  $F$  gehenden Niveaulinien haben Asymptoten, die aus Gründen potentieller Gleichwertigkeit die beiden Halbstreifen halbieren. Die nach links fortgesetzte Figur geht allmählich in eine wirkliche Quadratteilung durch gerade Linien über.

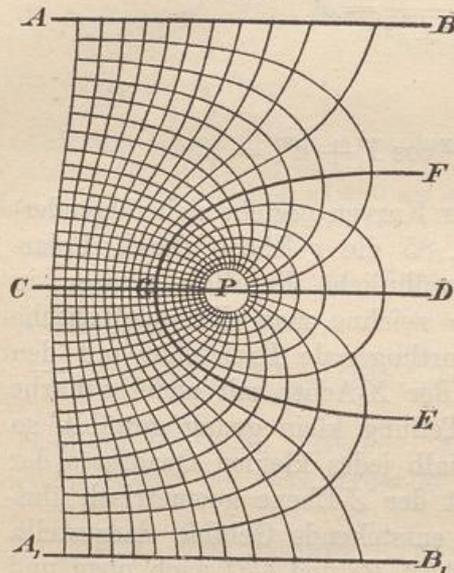
183) Deutungen der Figur. a) Man denke sich einen unbegrenzt langen Parallelstreifen von Metall, in den von links her Elektrizität einströme. Im Punkte  $P$  werde die gesamte Elektrizität abgeleitet. Die Figur stellt die Strom- und Niveaulinien des Problems und die entsprechende quadratische Einteilung dar. Die entsprechende Wärmeströmung ist mit denselben Worten darzustellen.

b) In einem flachen Kanale ströme von links her regelmäsig Wasser heran, welches durch eine Pumpe bei  $P$  entfernt wird oder dort durch eine Bodenöffnung nach unten versinkt. Die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials sind dargestellt. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. Nach rechts hin befindet sich die Flüssigkeit in angenähertem, in sehr großer Entfernung in absolutem Ruhezustande.

c) Der Streifen stelle nach der noch zu besprechenden Forchheimerschen Grundwassertheorie eine Grundwasser führende Sandschicht in einem Thale dar, dessen Begrenzung durch die Geraden

gegeben ist. Bei  $P$  werde der gesamte Grundwasserstrom durch eine Pumpe entfernt. Die Niveaulinien sind Linien gleichen Grundwasserstandes, bezogen auf die Neigungsebene des Thales, die anderen Linien sind Stromlinien des Grundwassers.

Fig. 184.



d) Man setze die Figur nach oben und unten durch Symmetrie periodisch fort, so dass man beliebig viele Parallelstreifen erhält. Die kleinen Kreise bei den Punkten  $P$  sollen die Normalschnitte von sehr langen parallelen Drähten sein. Von links her nahe sich eine Induktionswirkung, die in idealer Weise von dem „Drahtgitter“ vollkommen aufgesaugt werde. In dem Raume rechts von  $P$  werden die Dimensionen der „Quadrate“ allmählich unendlich groß gegen die der links davon liegenden. Die Influenzwirkungen werden also nach rechts hin allmählich unendlich schwach.

So erhält man eine Vorstellung von den Wirkungen der Schutzgitter, die folgende Bedeutung haben. Soll ein Körper, z. B. eine Magnetnadel, gegen Influenzwirkungen geschützt werden, so umschließt man ihn mit einem Metallgefäße, mit dem er leitend verbunden ist. Beide haben dann gleiches Potential, z. B. durch Verbindung mit der Erde das Potential Null. Um jedoch die Nadel beobachten zu können, muß man dem Gefäß eine Öffnung geben. Diese Öffnung hat man jedoch mit einem Parallelgitter von Drähten zu versehen, welches die Induktionswirkungen in der oben beschriebenen Weise abhält.

184) Eine Modifikation des Beispiels. Man denke sich in der  $z$ -Ebene das Zweipunktproblem mit elektrischer Ein- und Ausströmung in denselben Punkten ( $x=0$  und  $x=a$ ), jedoch soll in  $x=0$  doppelt soviel einströmen, als in  $x=a$  abgeleitet wird, so dass der Rest ins Unendliche abfließen muß. Die Strom- und Niveaulinien des Problems sollen in die  $Z$ -Ebene übertragen werden.

**Auflösung.** Es handelt sich um die Niveaulinien

$$2 \lg r - \lg r_1 = c \quad \text{oder} \quad \frac{r^2}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$

und um die Stromlinien

$$2\vartheta - \vartheta_1 = c \quad \text{oder} \quad 2 \arctan \frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x-a} = c.$$

Die entsprechenden Kurven erhalten die Gleichungen

$$\frac{e^{2X}}{\sqrt{e^{2X} - 2ae^X \cos Y + a^2}} = e^c,$$

was rechts und links logarithmiert werden kann, und

$$2 \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y} - \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y - a} = c,$$

oder

$$2Y - \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y - a} = c.$$

Die Zeichnung in der  $z$ -Ebene ist nach der in Nr. 182 angegebenen Methode anzufertigen und in die  $Z$ -Ebene wie dort zu übertragen. Man erhält die Strömung in einem Parallelstreifen, die bei  $P$  zur Hälfte aufgesaugt wird und zur anderen Hälfte weiter fließt, oder die eines Schutzgitters, welches die Influenzwirkungen nur zur Hälfte aufhebt.

An Stelle des Faktors 2 kann selbstverständlich jeder andere treten, so daß auch das allgemeinere Problem gelöst ist. Auch jedes andere Mehrpunktproblem der  $z$ -Ebene kann in die  $Z$ -Ebene übertragen werden.

Eine andere Behandlungsweise der Theorie der Schutzgitter sehe man bei Maxwell-Weinstein I Seite 323 bis 329 nach.

185) **Bemerkungen.** Kartographische Bedeutung hat diese Übertragungsweise noch dadurch, daß man sofort die Gleichungen der Kurven aufstellen kann, die irgend welchen auf der Polarkarte oder der Kugeloberfläche gegebenen auf der Mercatorkarte entsprechen. Auch könnte man Mercatorkarten anfertigen, bei denen nicht die Pole, sondern irgend ein Punkt des Globus nebst Gegenpunkt in unendliche Entfernung fällt, so daß z. B. ein Kontinent, wie Amerika, mit geringeren Verzerrungen dargestellt werden könnte.

Eine andere Deutung von Fig. 134 erhält man durch folgendes Vertauschungsproblem: Längs  $AB$  ströme Elektrizität ein, längs  $A_1B_1$  aus, durch einen bis ins Unendliche fortgesetzten Schnitt längs der Kurven von  $F$  über  $G$  nach  $E$  werde sie gezwungen, sich in entsprechenden Bogen zu bewegen. Die Lösung liegt vor. Auch das Problem Einströmung in  $PD$ , Ausströmung in  $PG$  ist für den Ausschnitt  $\widehat{FGE}$  gelöst.

186) Newtonsches Potential gewisser Kurven. In Band I ist gezeigt, wie gewisse Flächen ein mit Hilfe der Abbildungen  $Z = z^2$  und  $z = \sqrt{Z}$  leicht zu bestimmendes Potential haben. Hier läßt sich entsprechendes für gewisse Kurven ableiten. Was nämlich die Größenverhältnisse entsprechender Quadrate in beiden Ebenen anbetrifft, so sind die Dimensionen am Einheitskreise der  $Z$ -Ebene gleich denen des Streifens, dort also ist das Bogenelement  $s$  der einen Ebene gleich dem Elemente  $S$  der andern. In der Entfernung  $r$  vom Nullpunkte ist das Element  $s_1 = s \cdot r$ , also ist dort  $\frac{s_1}{r} = S_1$ . Für eine ganze Kurve und ihr Bild ist also

$$\sum \frac{s}{r} = \sum S.$$

Folglich: Die Länge der ganzen Kurve in der  $Z$ -Ebene ist gleich dem Newtonschen Potentialwerte der entsprechenden Kurve in der  $z$ -Ebene für den Nullpunkt.

Die den Streifen unter  $45^\circ$  schneidende Gerade z. B. hat überall die Länge  $2\pi\sqrt{2}$ . Ein einzelner Umgang einer unter  $45^\circ$  schneidenden logarithmischen Spirale, wo sie auch beginnen möge, hat daher im Nullpunkte den Potentialwert  $2\pi\sqrt{2}$ . Allgemein, bei Neigung  $\alpha$ , handelt es sich um  $\frac{2\pi}{\sin \alpha}$  für Länge bzw. Potentialwert. Ist  $u$  der Umfang eines geradlinigen Gebildes der  $Z$ -Ebene, so ist der Potentialwert des aus Bogen von logarithmischen Spiralen bestehenden entsprechenden Gebildes der  $Z$ -Ebene für den Nullpunkt ebenfalls gleich  $u$ .

Kongruente Gebilde im Streifen haben gleiche Umfänge. Ihre entsprechenden Gebilde haben im Punkte  $o$  denselben Potentialwert. Entsteht das eine Gebilde der  $Z$ -Ebene aus dem andern durch Parallelverschiebung in der Richtung des Streifens, so sind die beiden entsprechenden der  $Z$ -Ebene einander ähnlich mit  $O$  als äußerem Ähnlichkeitspunkt, sie haben aber übereinstimmende Potentialwerte in  $O$ .

(Umgekehrt ist  $\sum s = \sum Sr$ , also da  $r$  in  $e^x$  übergeht

$$\sum s = \sum Se^x,$$

diese Beziehung scheint aber nicht nutzbar zu sein. Die Vergleichung von Flächen führt auf  $\sum \frac{f}{r^2} = \sum F$ , so daß jede Fläche der  $Z$ -Ebene gleich dem Polarmomente ( $-2^{\text{ter}}$  Ordnung der entsprechenden Fläche der  $z$ -Ebene in Bezug auf den Nullpunkt ist.)

## 187) Die allgemeine isogonale Transformation.

Ganz allgemein handelt es sich um Abbildungen mittels der Funktionen komplexen Arguments

$$1) \quad X + Yi = f(x + yi).$$

Zu jeder solchen gehört eine konjugierte Funktion

$$2) \quad X - Yi = f_1(x - yi),$$

in der auch die komplexen Konstanten konjugiert zu nehmen sind.

Addition giebt

$$2X = f(x + yi) + f_1(x - yi),$$

Subtraktion

$$2Y = f(x + yi) - f_1(x - yi).$$

Demnach entsprechen den Parallelenscharen

$$X = a, \quad Y = b$$

die Kurvenscharen

$$\frac{f(x + yi) + f_1(x - yi)}{2} = a, \quad \frac{f(x + yi) - f_1(x - yi)}{2} = b.$$

Durch Multiplikation von 1) und 2) folgt noch

$$3) \quad X^2 + Y^2 = f(x + yi)f_1(x - yi),$$

so daß den konzentrischen Kreisen  $R = c$  Kurven

$$\sqrt{f(x + yi)f_1(x - yi)} = c$$

entsprechen. Durch Division folgt hingegen

$$\frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{f(x + yi)}{f_1(x - yi)},$$

so daß

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{1}{2i} \lg \frac{f(x + yi)}{f_1(x - yi)}$$

oder

$$\arctan \frac{Y}{X} = \frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)].$$

Überall hebt sich das Imaginäre weg. Den Kreisen  $\lg R = c$  oder  $R = e^c$  entsprechen die Kurven

$$\frac{1}{2} [\lg f(x + yi) + \lg f_1(x - yi)] = c,$$

den Geraden

$$\arctan \frac{Y}{X} = \vartheta$$

die Kurvenscharen

$$\frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)] = \vartheta.$$

Auch hierbei geht die quadratische Einteilung wieder in eine solche über. [Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde Kenntnisse aus der höheren Analysis, besonders solche über Differentialquotienten und Integrale der Funktionen komplexen Arguments beanspruchen. In des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ ist der Gegenstand möglichst elementar behandelt worden. Dort zeigt sich, daß durch Transformation mittels der Funktionen komplexen Arguments jedes Strömungsnetz wieder in ein solches übergeht.]

Man kann aus solchen Beziehungen mancherlei Schlüsse ziehen. Liegen z. B. alle Einströmungs- bzw. Ableitungsstellen auf einer Geraden, so gehört offenbar die Gerade, gegen die Symmetrie stattfindet, zu den Stromlinien. Durch die Abbildung  $Z = \frac{1}{z}$  geht die Gerade in einen Kreis über. Folglich: Liegen drei oder mehr Einströmungs- und auch Ausströmungspunkte auf einem Kreise (sind aber außerdem keine vorhanden), so gehört der Kreis zu den Stromlinien. Der Symmetrie gegen die Gerade entspricht Reciprozität gegen den Kreis. Durch drei Punkte läßt sich stets ein Kreis legen, folglich gehört zu jedem Dreipunktproblem ein Kreis und gegen diesen findet Reciprozität statt, so daß man sich nur um das Innere des Kreises zu kümmern braucht.

Liegen die Ausströmungspunkte symmetrisch gegen die Einströmungspunkte und entsprechen auch die Elektrizitätsmengen dieser Symmetrie, so gehört die Symmetrieachse zu den Niveaulinien. Liegen sie reciprok gegen jene, so gehört der Inversionskreis zu den Niveaulinien, und gegen diesen findet überhaupt Reciprozität statt. Vorausgesetzt wird dabei, daß je zwei reciproke Punkte gleiche Mengen ein- bzw. ableiten.

188) Inversionsbeziehungen und elektrische Bilder in der Ebene. Die geometrischen und physikalischen Beziehungen sind bei den zweidimensionalen Problemen zum Teil andere, als bei den dreidimensionalen, wie sie in Kap. VII entwickelt wurden.

Jedes Bogenelement  $s$  geht nach Nr. 139 und Fig. 105 durch Inversion wieder über in

$$s_1 = s \cdot \frac{OB}{OA_1} = s \frac{OA}{OB_1}$$

oder

$$1) \quad s_1 = s \frac{q^2}{OA^2} = s \frac{OA_1^2}{q^2}.$$

Denkt man sich über der Zeichnung Cylinder von unbegrenzter Höhe errichtet, so gilt diese Beziehung auch von gleich hohen Cylinderflächen, so daß

$$1^*) \quad F_1 = F \cdot \frac{e^2}{OA^2} = F \frac{OA_1^2}{e^2}$$

ist.

Kleine „Quadrate“ der Ebene gehen wieder in solche über, für sie ist aber

$$2) \quad F_1 = F \frac{e^4}{OA^4} = F \frac{OA_1^4}{e^4},$$

ebenso für die darüber stehenden Körper gleicher Höhe

$$2^*) \quad J_1 = J \frac{e^4}{OA^4} = J \frac{OA_1^4}{e^4}.$$

Will man durch die Elektrizitätsbelegung  $E$  der zur Cylinderachse parallelen Geraden und die der zugeordneten Geraden  $E_1$  den Kreis als Kurve konstanten Potentials erhalten, so muß es sich um das symmetrische Zweipunktproblem handeln. Die beiden elektrischen Mengen sind also gleich groß zu wählen. Folglich: Das Bild einer elektrischen Belegung ist hier eine gleich große Menge Elektrizität. Also

$$3) \quad E_1 = E.$$

Aus

$$E_1 = E$$

und

$$s_1 = s \frac{e^2}{OA^2} = s \frac{OA_1^2}{e^2}$$

folgt durch Division

$$\frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s} \cdot \frac{OA^2}{e^2} = \frac{E}{s} \frac{e^2}{OA_1^2},$$

folglich wird das Bild einer Dichte  $\delta = \frac{E}{s}$

$$4) \quad \delta_1 = \delta \frac{OA^2}{e^2} = \delta \frac{e^2}{OA_1^2}.$$

Dasselbe gilt von der Dichte der Flächenbelegung eines Cylinderelements.

Dagegen wird für die Dichte der Belegung eines Flächenelements der Ebene oder eines zugehörigen Körperelements

$$5) \quad \delta_1 = \delta \frac{OA^4}{e^4} = \delta \frac{e^4}{OA_1^4}.$$

189) **Aufgabe.** Das Problem des homogen belegten Cylinders abzubilden.

**Auflösung.** In der Schnittebene geht der Kreis in einen Kreis, die konzentrische Kreisschar in eine excentrische, das reguläre Strahlenbüschel der Kraftlinien in ein Kreisbüschel über, dessen Tangenten in den Büschelpunkten reguläre Strahlenbüschel sind. Die gleichen Bogenelemente des Kreises gehen nach 1) in solche über, die sich verhalten wie die Quadrate der Entfernungen  $OA$  (oder auch  $PA$ , wenn  $P$  der zugeordnete Punkt zu  $O$  im neuen Kreise ist). Die Dichtigkeiten der neuen Belegung sind also umgekehrt proportional diesen Entfernungsquadraten. Tritt an Stelle des Kreises eine Gerade, so ist das Gesetz leicht selbständig nachzuweisen

$$\left( p = \frac{1}{r} \cos a = \frac{1}{r} \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r^2} \right).$$

Die Wirkung des so belegten Cylinders (Kreises) nach außen läßt sich durch die der Geraden des inneren Büschelpunktes ersetzen, wobei die Quantitäten beider Belegungen gleich sind. Die Wirkung nach innen läßt sich ebenso durch die Belegung der Geraden des äußeren Büschelpunktes ersetzen. Hier lassen sich die früheren Betrachtungen über centrobarische Belegungen wiederholen.

Für den massiven Cylinder erhält man Dichtigkeiten, die umgekehrt proportional der 4<sup>ten</sup> Potenz der Entfernung sind.

190) **Bemerkung.** Bei dem dreidimensionalen Probleme stimmten die Elektrizitätsmengen der Bilder nicht mit denen der Originalpunkte überein, infolge dessen ging dort ein Teil der Elektrizität nach dem Unendlichen ab, und das Innere der Kugel hatte Niveauflächen, die dem Äußeren nicht reciprok waren. Hier fällt dieser Umstand weg, jedes  $E_1$  wird gleich  $E$ , also gehen jetzt durch die Abbildung die Niveaulinien eines Problems in die Niveaulinien des neuen Problems über. So tritt eine wesentliche Vereinfachung ein. Im Raume findet, wenn eine Kugel zu den Niveauflächen eines Problems gehört, im allgemeinen keine Reciprozität statt, wohl aber ist dies mit dem Kreise in der Ebene der Fall. Dieser Unterschied ist von wesentlicher Bedeutung. Weiteres über die Inversion in zweidimensionalen Problemen findet man in der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Hier soll aus Raumgründen nicht näher darauf eingegangen werden.

191) Ein wichtiges Mehrpunktproblem.

Unter den Mehrpunktproblemen ist folgendes von Bedeutung. In den Punkten  $y = \pm 1$  der  $Y$ -Achse ströme Elektrizität in gleichen

Mengen ein, im Nullpunkte des Koordinatensystems werde sie zur Hälfte abgeleitet, der Rest fließt nach dem unendlichen Bereiche ab. Die Gleichungen werden

- 1)  $\lg r_1 + \lg r_{-1} - \lg r_0 = c$  oder  $\lg \frac{r_1 r_2}{r_0} = c$ , oder  $\frac{r_1 r_2}{r_0} = e^c$ .
- 2)  $\vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0 = c$ .

Die Konstruktion der Kurven geschieht durch die entsprechenden Kreisscharen und Strahlenbüschel.

Bei dem Einpunktproblem war dagegen  $\lg R = c$ ,  $\Theta = c$ .

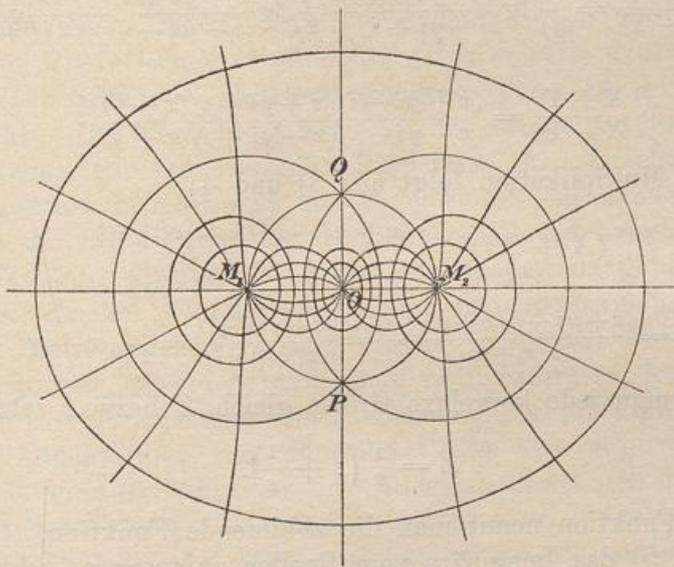
Zwischen den Polarkoordinaten der letzteren und denen der ersteren Ebenen finden also die Beziehungen

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_0} \quad \text{und} \quad \Theta = \vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0$$

statt.

In Fig. 135 ist die eine Ebene dargestellt. Es werde der Bequemlichkeit halber  $R = \frac{r_1 r_2}{2 r_0}$  gesetzt, was nur eine Verkleinerung des Maßstabes auf die Hälfte in der XY-Ebene bedeutet.

Fig. 135.



In gewöhnlichen Koordinaten lautet dann die Beziehung

$$1) \quad X^2 + Y^2 = \frac{[x^2 + (y-1)^2][x^2 + (y+1)^2]}{4(x^2 + y^2)}$$

$$\begin{aligned}
 2^*) \quad \arctan \frac{Y}{X} &= \arctan \frac{y-1}{x} + \arctan \frac{y+1}{x} - \arctan \frac{y}{x} \\
 &= \arctan \frac{\frac{y-1}{x} + \frac{y+1}{x}}{1 - \frac{y-1}{x} \cdot \frac{y+1}{x}} - \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} - \arctan \frac{y}{x} \\
 &= \arctan \frac{\frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{2xy}{x^2 - y^2 + 1} \cdot \frac{y}{x}} = \arctan \frac{2x^2y - y(x^2 - y^2 + 1)}{x(x^2 - y^2 + 1) + 2xy^2}
 \end{aligned}$$

oder

$$2) \quad \frac{Y}{X} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Will man erfahren, was den Kurven  $X = a$ ,  $Y = b$  entspricht, so hat man  $Y$  und  $X$  aus den beiden Gleichungen zu berechnen, was keine Schwierigkeiten macht.

Statt des gewöhnlichen Weges sei auf den Weg der Zerlegung in Produkte komplexer Faktoren aufmerksam gemacht. Man kann statt 1) schreiben

$$3) \quad (X + Yi)(X - Yi) = \frac{(x + yi - i)(x - yi + i)(x + yi + i)(x - yi - i)}{4(x + yi)(x - yi)}.$$

Statt 2\*) kann man schreiben

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{1}{2i} \lg \frac{x + yi - i}{x - yi + i} + \frac{1}{2i} \lg \frac{x + yi + i}{x - yi - i} - \frac{1}{2i} \lg \frac{x + yi}{x - yi}$$

oder

$$4) \quad \frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{(x + yi - i)(x + yi + i)(x - yi)}{(x - yi - i)(x - yi + i)(x + yi)}.$$

Durch Multiplikation folgt aus 3) und 4)

$$(X + Yi)^2 = \frac{(x + yi - i)^2 (x + yi + i)^2}{4(x + yi)^2}$$

oder

$$5) \quad X + Yi = \frac{(x + yi - i)(x + yi + i)}{2(x + yi)} = \frac{(x + yi)^2 + 1}{2(x + yi)} = \frac{1}{2} \left[ (x + yi) + \frac{1}{x + yi} \right],$$

oder wenn man jede komplexe Größe gleich  $Z$  bzw.  $z$  setzt,

$$6) \quad Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Diese Funktion nennt man die abbildende Funktion.

Um in 5) das Imaginäre vom Reellen zu trennen, schreibe man

$$\begin{aligned}
 X + Yi &= \frac{1}{2} \left[ x + yi + \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} \right] = \frac{1}{2} \left[ x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x(x^2 + y^2) + x}{x^2 + y^2} + \frac{y(x^2 + y^2) - yi}{x^2 + y^2} \right].
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$7) \quad X = \frac{x(x^2 + y^2) + 1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi,$$

$$8) \quad Y = \frac{y(x^2 + y^2) - 1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

So ist die Bestimmung von  $X$  und  $Y$  ohne umständliche Rechnungen erfolgt und das Resultat in die einfachste Gestalt gebracht. Die Kurven, die den Geraden  $X = a$ ,  $X = b$  der  $X$ -Ebene entsprechen, sind in der Zeichnung (Fig. 136) dargestellt. Für  $Y = 0$  erhält man die Kurve

$$\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

d. h. einen Kreis mit dem Radius 1, gegen den Reciprozität stattfindet. (Die Figur findet sich auch in der Dissertation des Dr. Hans Meyer, Zürich 1879.)

192) Deutungen der Figur. a) Man denke sich die homogene Strömung eines breiten Stromes von links nach rechts gehend. In der Mitte des gezeichneten Kreises werde durch ein Schaufelrad oder durch Dampfkraft eine kräftige Gegenströmung erzeugt, die kontinuierlich Wasser nach links treibt und von rechts her ansaugt. Diese Strömung denke man sich in der ganzen Tiefe wirkend. Ein Stromfaden geht von der Mitte  $O$  nach  $A$ , spaltet sich dort in einen über  $B$  und einen über  $D$  nach  $C$  und dann nach  $O$  zurückgehenden Faden von kreisförmiger Gestalt. Innerhalb dieses Kreises spielen sich lokale Wirbelbewegungen\*) von der gezeichneten Gestalt ab. Der Kreis bzw. Kreiscylinder zwingt den Strom, um ihn herumzugehen, wie um ein festes Hindernis. Alle Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate, die durch die Stromlinien und die orthogonale Kurvenschar (Niveaulinien oder Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials) gebildet werden. Daher herrscht bei  $A$  und  $C$  Aufhebung der Geschwindigkeiten.

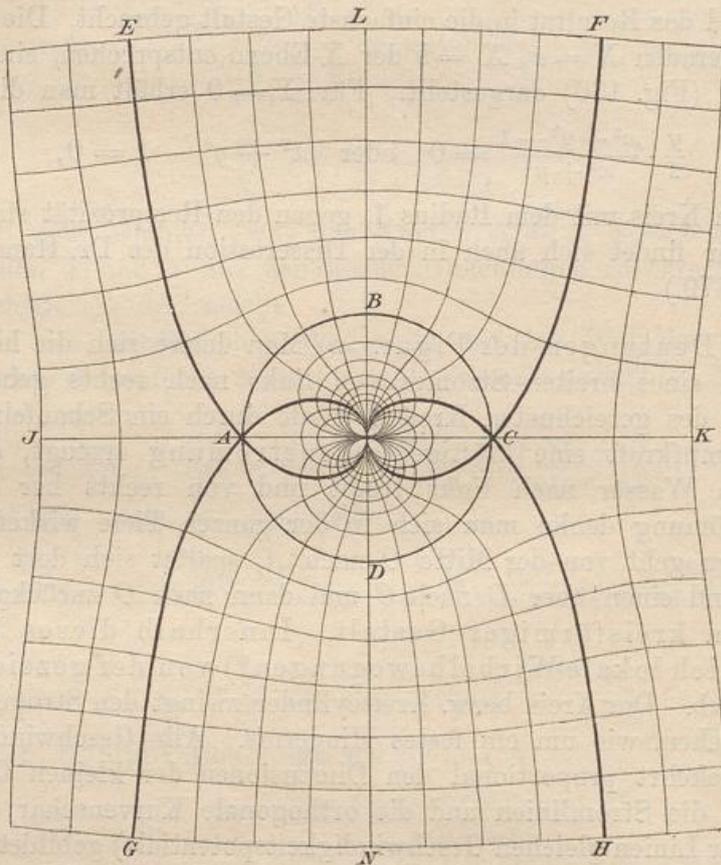
(Ein Vorlesungsversuch mit Wasser liefse sich wohl für kurze Zeit arrangieren, besonders wenn man nach Eintreten des stationären Zustandes im Wirbelraume andere Färbung hervorbringt. Selbstverständlich glückt dies nur angenähert, da hier von einer idealen Flüssigkeit ohne Reibung und ohne Molekulardrehungen die Rede ist.)

Statt der Flüssigkeitsströmung könnte man in ein breites Band, in dem Elektrizität von links nach rechts strömt, unmittelbar links von  $O$  Elektrizität einströmen, unmittelbar rechts von  $O$  abströmen lassen. Die Stromlinien sind dieselben. Auch eine entsprechende Wärmeströmung kann man sich denken.

\*) Nicht im Helmholtzschen, sondern im vulgären Sinne.

Statt dessen könnte man in das homogene erdmagnetische Feld einen kleinen Magnet stellen, dessen Lage der labilen Gleichgewichtslage des Kompasses entspricht. Dann gilt aber die Zeichnung nur angenähert, denn das Problem wird dreidimensional.

Fig. 136.



Später wird gezeigt werden, daß man sich rechts und links von  $O$  einen auf- und einen niedergehenden elektrischen Strom in Drähten denken kann, die normal zur Zeichnungsebene stehen. Die Kraftlinien der elektromagnetischen Wirkungen geben mit denen des homogenen, erdmagnetischen Feldes die vorliegende Zeichnung.

Man denke sich um den Mittelpunkt  $O$  einen größeren Kreis, als den vorliegenden, geschlagen. Er soll einen diamagnetischen Cylinder bedeuten, der in ein homogenes Feld gestellt ist. Dieser zwingt die Kraftlinien des letzteren zum Abweichen von der ursprünglichen Richtung, so daß eine geringere Anzahl horizontal durch ihn geht. Die Richtung innerhalb des Körpers ist horizontal in die

Zeichnung einzutragen. (Die entsprechende Figur befindet sich an späterer Stelle und auch in den Lehrbüchern.) Ein diamagnetischer Cylinder verhält sich also so, als ob in seinem Centrum ein kleiner Magnet in labiler Gleichgewichtslage angebracht wäre. Das Verhältnis der Anzahl von Kraftlinien, die jetzt den senkrechten Durchmesser des Kreises passieren, zu der Anzahl, die vorher durch dieselbe Linie ging, giebt den Faktor  $\mu$  der magnetischen Permeabilität, der hier kleiner als 1 ist. Die Lösung des magnetischen Problems ist nur eine angenäherte, weil die Aufgabe eigentlich eine dreidimensionale ist.

b) Das Vertauschungsproblem. Man denke sich jetzt die Strömung in der Zeichnung vertikal nach unten gerichtet, und bei  $O$  eine gleichgerichtete stärkere Strömung durch Schaufelrad oder mittels eines Cylinders hervorgebracht. Der Cylinder saugt dann einen Teil der Hauptströmung in sich ein, stößt aber nach unten hin so viel aus, daß die Kraftlinien sich wieder Raum schaffen. Die Grenzlinien der Einsaugung gehen durch  $A$  und  $C$ , erhalten dort einen rechtwinkligen Knick und gehen im Bogen nach  $O$ . Die ausgestoßene Strömung ist durch symmetrische Linien, die ebenfalls nach  $A$  und  $C$  gehen, begrenzt. Der lokale Wirbel findet innerhalb der beiden Flächen statt, die durch die von  $O$  nach  $A$  und  $C$  gehenden Bogen begrenzt sind.

Die entsprechenden Deutungen über stationäre elektrische oder Wärmeströmung, über Kraftlinien magnetischer oder elektromagnetischer Art im homogenen Felde bei stabiler Gleichgewichtslage des Magneten lege sich der Leser selbst zurecht. Ein größerer um  $O$  geschlagener Kreis wird von den Kraftlinien der Hauptströmung so getroffen, daß man das Bild der Einwirkung eines paramagnetischen Körpers erhält, der eine größere Anzahl von Kraftlinien zum Durchgang zwingt, als dem entsprechenden leeren Raume zukommen würden. In ihm selbst sind die Linien vertikale Gerade. (Fall  $\mu > 1$ .)

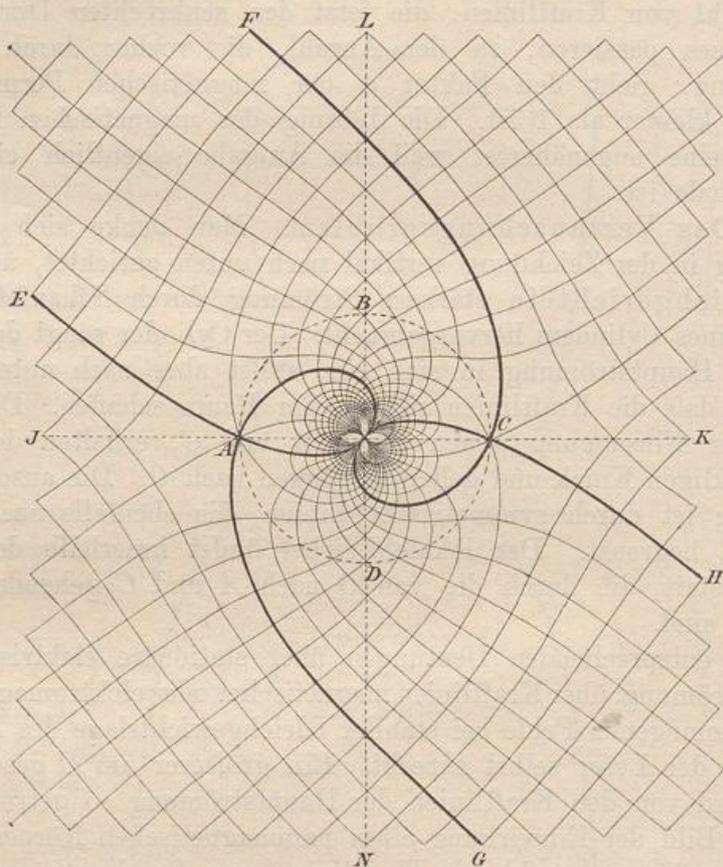
c) Das Diagonalproblem. Fig. 137 ist dadurch entstanden, daß in das Quadratnetz der vorigen die Diagonalen eingetragen sind, die wiederum ein Quadratnetz geben.

Die neuen Deutungen ergeben sich dadurch, daß man eine in der Zeichnung unter  $45^\circ$  geneigte homogene Hauptströmung bei  $O$  durch eine Lokalströmung stört, die senkrecht dagegen gerichtet ist. Die Grenzlinien der Ansaugung und Ausstoßung sind in der Zeichnung markiert, ebenso die Kurven, welche die lokalen Wirbel einschließen. Die übrigen Deutungen liegen auf der Hand.

Das Vertauschungsproblem giebt hier nichts Neues, sondern eine symmetrische Zeichnung, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht.

Beide Zeichnungen entsprechen den Tafeln XVI und XVII bei Maxwell-Weinstein, wo die leer gelassenen Cylinder das Verständnis erschweren.

Fig. 137.



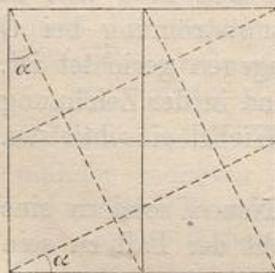
d) Andere Diagonalprobleme. In ähnlicher Weise giebt jede isothermische Quadratteilung der Ebene zu einem Strömungsproblem, einem Vertauschungsproblem und einem Diagonalproblem

Anlaß. Man kann aber auch andere Diagonalprobleme ableiten, indem man z. B. in das ursprüngliche Quadratnetz orthogonale Rechtecksdiagonalen z. B. für

$$\tan \alpha = \tan \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

einzeichnet, wie es Fig. 138 andeutet.

Fig. 138.



193) Die selbständige Konstruktion der Kurven in Fig. 136 kann folgendermaßen

erfolgen. Nach Festsetzung der Einheit  $DE$  bildet man zu einer beliebigen Länge  $r$  den reciproken Wert  $\frac{1}{r}$  und trägt  $2c$  als Sehne  $AC$  in einen Halbkreis vom Durchmesser  $AB = r + \frac{1}{r}$  ein. Dies giebt einen Winkel  $BAC = \varphi$ , für den

$$\cos \varphi = \frac{2c}{r + \frac{1}{r}}$$

ist, was der Gleichung 7) entspricht. So erhält man für jedes  $r$  und  $c$  das zugehörige  $\varphi$ , und damit sind beliebig viele Punkte einer Kurve von der Gleichung

$$\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = c$$

konstruiert. Ebenso verfährt man mit  $r - \frac{1}{r}$ , was auf Kurven von der Gleichung

$$\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = c$$

führt.

194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten. Der Einheitskreis der  $z$ -Ebene entspricht bei vorliegender Abbildung dem horizontalen (doppelt zu denkenden) Durchmesser des Einheitskreises der  $Z$ -Ebene. So liegt es nahe zu untersuchen, welche Kurven der  $Z$ -Ebene den Polarkoordinaten der  $z$ -Ebene überhaupt entsprechen.

Man gehe aus von den aus 7) und 8) folgenden Beziehungen

$$\frac{X}{\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)} = \cos \varphi, \quad \frac{Y}{\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)} = \sin \varphi.$$

Um  $\varphi$  zu entfernen, quadriert man beide Seiten jeder Gleichung und bilde durch Addition eine neue Gleichung. Bei dieser steht rechts  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$  oder 1, so daß man erhält

$$9) \quad \frac{X^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \right]^2} + \frac{Y^2}{\left[ \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \right]^2} = 1.$$

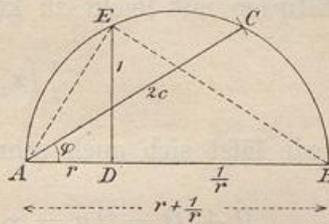
Dies ist aber für gegebenes  $r$  die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right).$$

Da

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4} \left( r + \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2 = 1$$

Fig. 139.



ist, so liegen die Brennpunkte an den Stellen  $\pm 1$  der  $X$ -Achse Also:

Der konzentrischen Kreisschar  $r = \kappa$  um den Nullpunkt der  $z$ -Ebene entspricht in der andern Ebene eine Schar konfokaler Ellipsen mit leicht zu konstruierenden Halbachsen

$$\frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right).$$

Jede läßt sich auch schreiben nach der Vektorengleichung

$$P + Q = 2a = \kappa + \frac{1}{\kappa} \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2} \left( \kappa + \frac{1}{\kappa} \right) = a.$$

Um aus 7) und 8) die Größe  $r$  zu eliminieren, gehe man aus von den Formen

$$\frac{X}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad \frac{Y}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right),$$

quadriere beiderseits und bilde eine neue Gleichung durch Subtraktion. Rechts steht dann

$$\frac{1}{4} \left( r + \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2 = 1,$$

so daß die Gleichung lautet

$$10) \quad \frac{X^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{Y^2}{\sin^2 \varphi} = 1.$$

Der Geraden  $\varphi = \gamma$  durch den Nullpunkt der  $z$ -Ebene entspricht also in der  $Z$ -Ebene eine Hyperbel. Ihre Halbachsen  $a$  und  $b$  geben die Beziehung

$$a^2 + b^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

demnach liegen die Brennpunkte an den Stellen  $\pm 1$  der  $X$ -Achse, und  $\gamma$  ist zugleich die Neigung der Asymptote. Dem Strahlenbüschel  $\varphi = \gamma$  durch den Nullpunkt der  $z$ -Ebene entspricht also eine Schar konfokaler Hyperbeln. Jede davon läßt sich nach der Vektorengleichung schreiben in der Form

$$P - Q = 2a = 2 \cos \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos \gamma.$$

Aus

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \quad \text{und} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos \varphi$$

folgt

$$r = \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left( \frac{P+Q}{2} \right)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \varphi = \arccos \frac{P-Q}{2}.$$

Jeder Kurve  $f(r, \varphi) = 0$  der  $z$ -Ebene entspricht also eine Kurve

$$f\left[\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1}\right), \arccos \frac{P-Q}{2}\right] = 0$$

der  $Z$ -Ebene, jeder Kurve

$$f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \cos \varphi\right] = 0$$

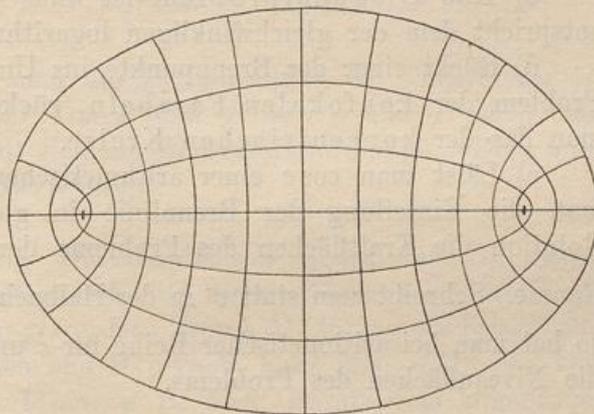
der  $z$ -Ebene eine Kurve

$$f\left[\frac{P+Q}{2}, \frac{P-Q}{2}\right] = 0$$

der  $Z$ -Ebene. Setzt man die Halbachse  $\frac{P+Q}{2}$  gleich einem Parameter  $a$ , die der Hyperbel gleich einem Parameter  $\alpha$ , so würde es sich handeln um  $f(a, \alpha) = 0$ .

Fig. 140.

Fig. 140 stellt die Quadratteilung durch konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar. Die Asymptoten der Hyperbeln folgen unter gleichen Winkeln aufeinander, genau so wie die Geraden der  $z$ -Ebene. Quadratteilung entsteht, wenn in



$$\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1} = e \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{e^c + e^{-c}}{2} \quad (\text{Halbachse } a),$$

ebenso in

$$\arccos \frac{P-Q}{2} = c$$

oder

$$\frac{P-Q}{2} = \cos c \quad (\text{Halbachse bzw. Asymptotenneigung } c)$$

der Parameter  $c$  einer arithmetischen Reihe folgt, z. B. der Reihe

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

195) Deutungen der Figur. a) In die Ebene strömt längs der Brennnlinie  $F_1 F_2$  Elektrizität ein und wird nach dem Unendlichen abgeleitet. Dasselbe gilt von der Wärmeströmung. Die Hyperbeln sind

Strom-, die Ellipsen Niveaulinien. In den hyperbolischen Kanälen strömt gleich viel Fluidum. Oder aus einem flachen See von konstanter Tiefe wird längs der Linie  $F_1F_2$  Wasser entfernt. Oder mit Hilfe des Sickerschlitzes  $F_1F_2$  wird aus homogener Grundwasserschicht Wasser ausgepumpt. Oder  $FF_1$  stellt eine unbegrenzte Ebene dar, die so mit Masse belegt ist, daß auf die Abschnitte der Brennlinie gleich viel Masse kommt. Dabei handelt es sich um die Newtonschen Kraft- und Niveaulinien. Die Belegung dieser Ebene bzw. eines der Cylinder entspricht der elektrischen Verteilung bei Ladung und Influenz.

b) Vertauschungsproblem. Man denke sich aus der  $X$ -Achse die Brennlinie  $F_1F_2$  entfernt. In dem stehenbleibenden Teile der positiven Achse lasse man Elektrizität ein, in dem der negativen ausströmen. Die Ellipsen werden Strom-, die Hyperbeln Niveaulinien. Ebenso ist es mit den anderen Deutungen.

c) Das Diagonalproblem ist ohne besondere Bedeutung, es entspricht dem der gleichwinkligen logarithmischen Spiralen.

d) Rückt einer der Brennpunkte ins Unendliche, so hat man das Problem der konfokalen Parabeln, rücken beide nach  $O$ , so hat man das der konzentrischen Kreise.

e) Läßt man  $\cos c$  einer arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung der Brennlinie in gleiche Stücke und durch Rotation die Kraftflächen des Problems der homogenen Geraden im Raume. Schreibt man statt  $e$  in der Halbachsenformel der Ellipsen  $\frac{1}{c}$ , so hat man bei arithmetischer Reihe für  $c$  und nach erfolgter Rotation die Niveaulinien des Problems.

196) Zusammenstellung der gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen.

In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurvenscharen:

$Z$ -Ebene.

$z$ -Ebene.

1)  $f[X, Y] = 0$

1\*)  $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi, \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi\right]$ .

2)  $f[a, \alpha] = 0$

2\*)  $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \cos \varphi\right] = 0$ .

3)  $f[R, \Phi] = 0$

3\*)  $f\left[\frac{pq}{2r}, \varphi + \chi - \vartheta\right] = 0$ .

4)  $f[(a + \sqrt{a^2 + 1}), \arccos \alpha] = 0$

4\*)  $f[r, \varphi] = 0$ .

5)  $f[(a + \sqrt{a^2 - 1}) \sqrt{1 - \alpha^2}, \alpha(a + \sqrt{a^2 - 1})] = 0$

5\*)  $f(xy) = 0$ .

6)  $f\left[\frac{P}{Q}, (\Phi - X)\right] = 0$

6\*)  $f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2, 2(\varphi - \chi)\right] = 0$ .

Hier bedeuten  $a$  und  $\alpha$  die Ausdrücke  $\frac{P+Q}{2}$  und  $\frac{P-Q}{2}$ . In 3\*) gehen  $p, q$  und  $r$  von den Punkten  $+i, -i$  und  $0$  aus, die Relation 5) ergibt sich durch Berechnung von  $x$  und  $y$  aus den Gleichungen

$$r + \frac{1}{r} = 2a \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \alpha$$

oder aus

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha.$$

Führt man statt  $a$  und  $\alpha$  die Koordinaten  $X$  und  $Y$  ein, so entsteht die kompliziertere Formel

$$x = X + \sqrt{\frac{V(X^2 - Y^2 - 1)^2 - 4X^2Y^2 + (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}$$

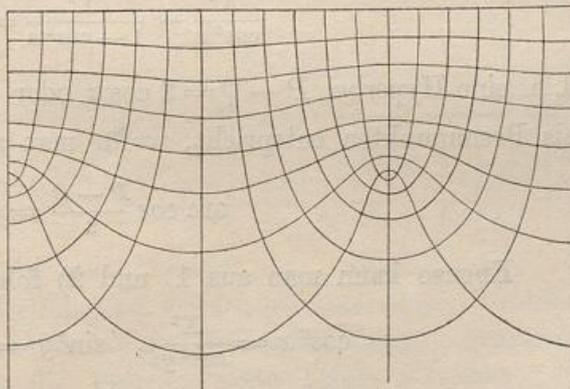
$$y = Y + \sqrt{\frac{V(X^2 - Y^2 - 1)^2 - 4X^2Y^2 - (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}$$

Über 6) vergleiche man die Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Die  $P$  und  $Q$  bzw.  $p$  und  $q$  gehen dabei von  $-1$  aus. Es handelt sich um Bicircularkoordinaten. Dort findet man noch anderweitige Beziehungen.

197) Bemerkungen. Die elliptischen Koordinaten für Ebene und Raum sind für die Mechanik und die mathematische Physik von hervorragender Bedeutung geworden. Durch Abbildung des betreffenden Quadratnetzes der Ellipsen und Hyperbeln kann man zahlreiche komplizierte Linearprobleme lösen, z. B. über sternförmig angeordnete Sickerschlitze und dgl. Man versuche z. B. die Abbildungen  $Z = \sqrt{z}$ ,  $Z = \sqrt[n]{z}$  darauf anzuwenden.

So kann man z. B. durch  $Z = \sqrt{z}$  das Problem der Geraden  $F_1F_2$  in das Problem zweier Geraden auf derselben Linie verwandeln, wobei eine Normale als Symmetrieachse auftritt. Man kann jetzt die Betrachtung auf die Halbebenen beschränken und diese durch die Abbildung  $Z = z^2$  in eine aufgeschnittene Vollebene ver-

Fig. 141.



wandeln. Durch die Abbildung  $Z = \lg z$  erhält man dann eine Abbildung auf Parallelstreifen, durch die man die Maxwellsche Fig. 141 erhält, die nach rechts und nach oben und unten durch Symmetrie fortgesetzt gewisse Probleme über begrenzte und unbegrenzte Platten löst.

198) Abbildung  $Z = \cos z$ .

Auch die Parallelströmung in einem Streifen von der Breite  $2\pi$  läßt sich direkt in die elliptisch-hyperbolische übertragen. Setzt man nämlich

$$X + Yi = \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$

so folgt

$$X - Yi = \cos(x - yi) = \cos x \cos yi + \sin x \sin yi,$$

durch Addition folgt

$$1) \quad X = \cos x \cos yi,$$

$$2) \quad Y = \frac{\sin x \sin yi}{i}.$$

Aus 1) folgt

$$\cos^2 yi = \frac{X^2}{\cos^2 x}, \quad \text{aus 2) } \sin^2 yi = -\frac{Y^2}{\sin^2 x},$$

da aber

$$\cos^2 yi + \sin^2 yi = 1,$$

so folgt

$$3) \quad \frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1,$$

so daß den Geraden  $x = a$  die Kurve

$$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{1 - \cos^2 a} = 1,$$

d. h. eine Hyperbel  $P - Q = 2 \cos a$  oder  $\frac{P - Q}{2} = \cos a$  mit  $x = \pm 1$  als Brennpunkten entspricht, wofür man noch schreiben kann

$$\arccos \frac{P - Q}{2} = a.$$

Ebenso kann man aus 1) und 2) folgern

$$\cos^2 x = \frac{X^2}{\cos^2 yi}, \quad \sin^2 y = -\frac{Y^2}{\sin^2 yi},$$

so daß aus  $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$  folgt

$$4) \quad \frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1.$$

Nun ist aber

$$\cos yi + i \sin yi = e^{i(yi)} = e^{-y}$$

also

$$\cos yi - i \sin yi = e^{-i(yi)} = e^y,$$

folglich ist

$$\cos yi = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}),$$

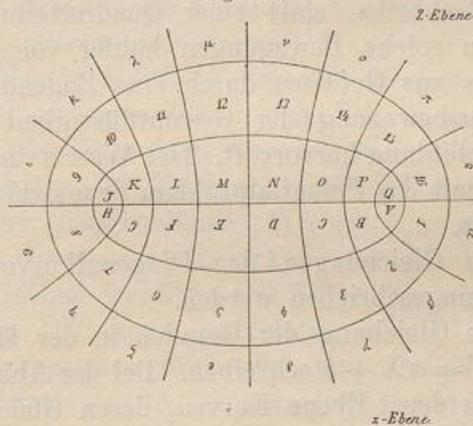
$$\sin yi = -\frac{1}{2i} (e^y - e^{-y}) = \frac{i}{2} (e^y - e^{-y}),$$

Gleichung 4) läßt sich also schreiben in der Form

$$5) \quad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\right]^2} = 1,$$

so daß es sich um die konfokale Ellipsenschar handelt, die den Geraden  $y = b$  entspricht. Fig. 142 zeigt, daß ein unendlicher senkrechter Streifen von der Breite  $2\pi$  auf der elliptisch-hyperbolischen Ebene dargestellt ist, woraus sich neue Beziehungen ergeben. Der Periodizität des Streifens entspricht die der elliptischen Strömung und die der abbildenden Funktion  $Z = \cos z$ .

Fig. 142.



199) Bemerkungen über Diagonalprobleme und über graphische Addition von Problemen. Bildet man die Diagonal-

$e$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$i$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\sigma$
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
V	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
v	\delta	\epsilon	\zeta	\eta	\theta	\iota	\kappa	\lambda	\mu	\nu	\omicron	\pi	\rho	\sigma	\tau	\upsilon	\phi

kurven einer quadratischen isothermischen Einteilung, so werden gewissermaßen Problem und Vertauschungsproblem in den Gesamtwirkungen graphisch addiert. Man denke sich die Potentialwerte beider Probleme auf den beiderseitigen Niveaulinien als Normalen auf der Ebene errichtet, nach oben, wenn sie positiv, nach unten, wenn sie negativ sind. Die Lote sind algebraisch zu addieren. Da nun die Teilung

quadratisch war, so folgt der Parameter  $c$  in beiden Problemen derselben arithmetischen Reihe. Beide Reihen sind entgegengesetzt, die eine zunehmend, die andere abnehmend zu denken, und so bleibt auf den Diagonalkurven die Summe konstant, sie werden die neuen Niveaulinien. Die Kraftlinien stehen von selbst senkrecht dagegen und fallen in die andere Diagonalrichtung. Man kann die Sache auch rein kinematisch deuten. Denkt man sich z. B. die Radialbewegung einer Flüssigkeit in früher besprochenen Linien und zugleich die Kreisbewegung des Vertauschungsproblems, und ist in beiden die Geschwindigkeit proportional  $\frac{1}{r}$  (dem Reciproken des Abstandes vom Centrum), so findet die Bewegung auf der logarithmischen Spirale statt, die unter  $45^\circ$  schneidet. Wären beide Potentialwirkungen von ungleicher Intensität in dem Sinne, daß z. B. die eine Geschwindigkeit proportional  $\frac{1}{r}$ , die andere proportional  $\frac{2}{r}$  wäre, so würde eine andere logarithmische Spirale entstehen. Man hätte die Diagonalen einer Rechtecks- statt einer Quadratteilung zu ziehen. Angenähert kommen solche Bewegungen häufig vor, z. B. beim Ausfließen des Wassers aus Gefäßen durch eine Bodenöffnung, wobei die geringste Drehungsbewegung der Gesamtflüssigkeit in den Stromlinien sofort Spiralenbildung hervorruft. Der Wasserstand muß bereits ein niedriger sein, damit das Potentialproblem dem zweidimensionalen sich möglichst annähert.

Die Gleichungen der Diagonalkurven können in allen Fällen sofort hingeschrieben werden.

Die Gleichung der Geraden in der Ebene läßt sich stets in der Form  $Y = aX + b$  schreiben. Bei der Abbildung  $Z = \lg z$  entsprechen ihnen in der  $z$ -Ebene Kurven, deren Gleichung nach Nr. 181 ist

$$\vartheta = a \lg r + b \quad \text{oder} \quad r = e^{\frac{\vartheta - b}{a}}$$

Durch die Abbildung  $Z = \sqrt{z}$  gehen sie über in Kurven von der Form

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) = a (\lg p_1 + \lg p_2) + b = a \lg (p_1 p_2) + b$$

oder

$$p_1 p_2 = e^{\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) - b}{a}}$$

Dies sind die Gleichungen der lemniskatischen Spiralen. Dagegen würden sie durch die Abbildung  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  übergegangen sein in Kurven von der Gleichung

$$\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} = e^{\frac{\arccos \frac{p-q}{2} - b}{a}}$$

Dies würden die elliptischen Spiralen, d. h. die Diagonalkurven der elliptischen Koordinaten sein. Bei der Quadratteilung vereinfacht sich die Formel, da man von den Gleichungen  $Y = \pm X + b$  der zwei unter  $\pm 45^\circ$  geneigten Linien ausgeht, was sofort beide Gruppen giebt. Es ist dann  $a = 1$  zu setzen.

Denkt man sich bei dem einfachen Radialproblem eine magnetische Wirkung mit einer elektromagnetischen langer Drahtströme kombiniert, derart, daß die eine Radien, die andere Kreise als Kraftlinien giebt, so würden die Kraftlinien des Gesamtproblems mit den entsprechenden Diagonalkurven zusammenfallen.

Der Satz von der algebraischen Addition der Potentialwerte gestattet überall, bei gleichen Potentialdifferenzen zwischen den Niveaulinien zweier Probleme aus den Kraftlinien beider die Kraftlinien des Gesamtproblems graphisch abzuleiten, indem man die Diagonalkurven zieht. Ebenso kann man aus den Niveaulinien beider die des Gesamtproblems bilden. (Weil dies richtig ist für die einfachsten Fälle, so muß es durch konforme Abbildung mittels komplexer Funktionen auch für kompliziertere Fälle gelten.)

Es ist eine nützliche Übung, sämtliche Figuren, die man kennt, auf alle Art zu deuten und so einen klaren Einblick in die Idealprobleme der verschiedenen physikalischen Theorien zu erhalten. So kann man z. B. die Lemniskaten des Zweipunktproblems deuten als die Zusammensetzung zweier festgehaltener Wirbel von gleichem Drehungssinne, über deren gegenseitige Einwirkung für den Fall der Beweglichkeit wir später sprechen werden. Die Schar der sich nicht schneidenden Kreise in Fig. 127 kann aufgefaßt werden als die Kombination zweier entgegengesetzt drehender und festgehaltener Wirbel. Fig. 135 kann gelten als die Kombination dreier gleichwertiger Wirbel, von denen der mittlere entgegengesetzten Drehungssinn hat, als die beiden andern.

In Fig. 130 z. B. handelt es sich um 6 gleichwertige Wirbel mit festgehaltenem Centrum, von denen die drei inneren entgegengesetzten Drehungssinn haben, wie die äußeren.

Auf die entsprechenden elektromagnetischen Deutungen kommen wir noch ausführlicher zu sprechen.

200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärme-problemen. Liegen mehrere punktförmige Elektroden auf einer Geraden, so gehört die Gerade selbst zu den Stromlinien. Diese Zusammengehörigkeit bleibt bei jeder konformen Abbildung, z. B. bei der durch Inversion geschehenden, erhalten. Bei letzterer geht die Gerade z. B. in einen im Endlichen liegenden Kreis über. Folglich:

Liegen sämtliche Elektroden, die positiven wie die negativen, auf einem Kreise, so gehört dieser zu den Stromlinien. Damit neben dem Kreise nicht auch noch der unendlich ferne Punkt Elektrode sei, muß die Summe der einströmenden Elektrizitäten gleich Null sein. Während gegen die obige Gerade Symmetrie der Strom- und Niveaulinien stattfindet, ergibt sich hier Reciprozität des Kreisinnern und des Kreisäußern. Man braucht sich also nur mit dem Kreisinnern zu beschäftigen und darf die Kreisscheibe ausschneiden, ohne daß sich etwas ändert.

Ein Blick auf die nachstehende Figur zeigt nun, daß sich das Vertauschungsproblem folgendermaßen formulieren läßt: Als Elektroden mit der Einströmungssumme Null betrachte man die aufeinanderfolgenden Teile des Kreisumfangs. Dabei werden sich weder die Strom- noch die Niveaulinien ändern. Nur die Vertauschung beider Gruppen findet statt.

Hierbei wird allerdings fingiert, daß jede bandförmige Elektrode in ihrem ganzen Verlaufe konstantes Potential habe, was nach Margules (Bericht der Wiener Akademie vom 11. Mai 1877) nicht absolut genau sein wird, jedoch kann das ideale mathematische Problem die betreffende Voraussetzung machen. Dasselbe gilt auch von Wärmeeinströmungen in dem Sinne, daß die einzelnen Kreisbogen auf konstanten Temperaturen gehalten werden, wobei die Isothermen und Stromlinien dieselbe Gestalt behalten, wie vorher.

Damit gelangt man wiederum auf die Fourierschen Probleme mit Randbedingungen, und zwar auf solche, die mit elementaren Hilfsmitteln vollständig lösbar sind. Dabei soll von einer speziellen Aufgabe ausgegangen werden, die sich leicht verallgemeinern läßt. Wenn den Punkten dabei eine regelmäßige Lage gegeben wird, so geschieht dies nur, um das Zeichnen der beiden Kurvensysteme zu erleichtern. Da übrigens durch drei Punkte stets ein Kreis gelegt werden kann, ist bei dieser Anzahl der Kreis stets Stromlinie.

201) **Aufgabe.** Drei Punkte  $A_1, A_2, A_3$  einer Ebene mögen ein gleichseitiges Dreieck bilden. In  $A_1$  ströme Wärme oder Elektrizität ein, in  $A_2$  und  $A_3$  ströme sie in gleichen Teilen aus. Das Stromnetz soll untersucht werden.

**Auflösung.** Nach Nr. 175 werden, da die ein- und ausströmenden Massen sich wie  $2:-1:-1$  verhalten, die Gleichungen der Niveaulinien von der Form

$$1) \quad 2 \lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c,$$

oder

$$1^*) \quad \frac{r_1^2}{r_2 r_3} = e,$$

die der Stromlinien von der Form

$$2) \quad 2 \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma.$$

Die Zahl der von  $A_1$  ausgehenden Stromkanäle ist doppelt so groß, wie die der in  $A_2$  oder  $A_3$  endenden. Aus Symmetriegründen gehört der Durchmesser  $AD$  zu den Stromlinien. Unter den Niveaulinien spielen die Kurven  $DF$  und  $DE$ , durch welche die rechten Winkel bei  $D$  halbiert werden, eine Ausnahmestelle.

202) Das zugehörige Vertauschungsproblem. Der Bogen  $A_1 A_2$  werde durch Wärmezufuhr auf konstanter Temperatur  $t_1$  gehalten,  $A_2 A_3$  auf  $t_2$ ,  $A_3 A_1$  auf  $t_3$ . In der Figur ist die Zahl der zwischen  $A_1 A_2$  und  $A_3 A_1$  liegenden Niveaustreifen doppelt so groß, als die der zwischen  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  bzw. zwischen  $A_2 A_3$  und  $A_3 A_1$  liegenden. Dasselbe gilt von der Anzahl der Wärmeabstufungen oder Potentialdifferenzen. Der Wärmeunterschied zwischen  $A_3 A_1$  und  $A_1 A_2$  muß also (absolut genommen) doppelt so groß sein, als der Wärmeunterschied zwischen  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  bzw. zwischen  $A_2 A_3$  und  $A_3 A_1$ , wenn die beiden Probleme identisch bleiben sollen.

Dem wird genügt, wenn man

$$t_1 - t_2 = +\alpha, \quad t_2 - t_3 = +\alpha, \quad t_3 - t_1 = -2\alpha$$

oder noch einfacher

$$t_1 - t_2 = 1, \quad t_2 - t_3 = 1, \quad t_3 - t_1 = -2$$

setzt. Die letzte Gleichung ist jedesmal eine Folge der beiden ersten, und es ist in jedem Falle

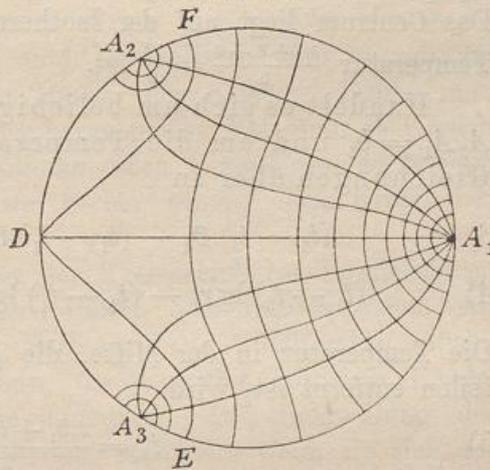
$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + (t_3 - t_1) = 0.$$

Dem genügen z. B. die Temperaturen  $2^\circ, 1^\circ, 0^\circ$ , ebenso die Temperaturen  $16^\circ, 8^\circ, 0^\circ$ .

Jetzt erhalten die Niveaulinien (Isothermen) die Gleichung

18\*

Fig. 143.



$$1) \quad 2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma,$$

die Stromlinien die Gleichung

$$2) \quad 2 \lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c.$$

Man beachte, wie in der Zeichnung der Bogen  $A_1F$  seine Wärme nach  $EA_1$  schickt, der Bogen  $FA_2$  nach  $A_2D$ , der Bogen  $DA_3$  nach  $A_3E$ , so daß die geknickte Kurve  $FDE$  die einzelnen Bereiche voneinander scheidet. Die Isothermen haben von  $A_1A_2$  aus gezählt z. B. die Temperaturen  $16^\circ, 14^\circ, 12^\circ, 10^\circ, 8^\circ, 6^\circ, 4^\circ, 2^\circ, 0^\circ$ . Das Centrum liegt auf der Isotherme  $A_1D$  von  $8^\circ$ , was die mittlere Temperatur  $\frac{16+8+0}{3} = \frac{24}{3}$  ist.

Handelt es sich um beliebige Bogen  $A_1A_2 = b_1, A_2A_3 = b_2, A_3A_1 = b_3$  und um die Temperaturen  $t_1, t_2, t_3$ , so gehen die Gleichungen über in

$$3) \quad (t_1 - t_3)\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\vartheta_2 - (t_3 - t_2)\vartheta_3 = \gamma,$$

$$4) \quad (t_1 - t_3) \lg r_1 - (t_2 - t_1) \lg r_2 - (t_3 - t_2) \lg r_3 = c$$

Die Temperatur in der Mitte, die gleichweit von sämtlichen Bogen-  
teilen entfernt ist, wird

$$5) \quad t_\mu = \frac{t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3}{2 r \pi}.$$

Handelt es sich um  $n$  Bogen  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  und um konstante  
Temperaturen  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  im obigen Sinne, so gehen die Gleichungen über in

$$6) \quad (t_1 - t_n)\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\vartheta_2 + \dots + (t_n - t_{n-1})\vartheta_n = \gamma$$

$$6) \quad (t_1 - t_n) \lg r_1 + (t_2 - t_1) \lg r_2 + \dots + (t_n - t_{n-1}) \lg r_n = c,$$

$$8) \quad t_\mu = \frac{t_1 b_1 + t_2 b_2 + \dots + t_n b_n}{2 r \pi}.$$

Durch Abbildung mittels irgend welcher Funktionen komplexen  
Arguments, z. B. durch die lemniskatische Abbildung  $Z = \sqrt{z}$  (vgl.  
Ingenieur-Mathematik I Seite 175) kann man von den Randproblemen  
des Kreises zu anderen, z. B. zu denen der Lemniskate übergehen.  
An Stelle der Bogen mit konstanten Temperaturen kann man Elek-  
troden von konstantem Potential und konstanter Ergiebigkeit  $t_1, t_2,$   
 $\dots, t_n$  setzen, wobei die Gleichungen dieselben bleiben. [In der  
Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang 1897, Seite 218 bis 246 ist  
das betreffende Problem vom Verfasser ausführlicher behandelt und  
mit anderen Gebieten der math. Physik in Beziehung gesetzt worden.]

203) Andere Fouriersche Probleme. Handelt es sich um eine endliche Anzahl von Kreisbogen auf konstant gehaltener Temperatur, so gehen die Stromlinien überall, mit Ausnahme der Grenzpunkte, senkrecht von der Kreisperipherie aus, die selbst zu den Niveaulinien gehört.

Anders ist es, wenn die einzelnen Bogen unendlich klein sind, selbst wenn die Änderungen der Temperatur von einer Randstelle zur andern stetig vor sich gehen. (Es ist der Fall unendlich vieler Elektroden.)

Um dies zu verstehen, schlage man z. B. im lemniskatischen Zweipunktprobleme der Ebene einen Kreis, der die beiden Quellpunkte ausschließt. Die Strom- und Niveaulinien sind überall die des Zweipunktproblems, auch im Innern des Kreises. Denkt man sich jetzt diesen aus der Umgebung herausgelöst, hält man aber jeden Punkt des Randes auf der ihm zukommenden Temperatur, so bleiben die Niveaulinien dieselben, die sie vorher waren. Der Kreis aber gehört nicht zu ihnen.

In ähnlicher Weise kann man der Kreisperipherie Temperaturen geben, die jedem beliebigen anderen Punkt- oder Linearproblem entsprechen, dessen Lösung bereits vorliegt. Die Quellpunkte mögen dabei vorläufig ausgeschlossen sein, damit weder auf dem Rande, noch im Innern Diskontinuitäten auftreten. Die Behandlung der letzteren ist nicht ohne Schwierigkeiten, besonders wenn sie sich auf endlichem Raum zu unendlicher Zahl häufen. Die Untersuchung gehört dann nicht mehr der Elementarmathematik an.

Wir können hier nur Probleme besprechen, deren Lösungen nach der früheren Betrachtung bereits bekannt sind. Die allgemeinste Fouriersche Aufgabe kann allerdings grundsätzlich als bereits gelöst betrachtet werden, jedoch sind geschlossene Lösungen, bei denen nicht erst noch unendliche Reihen summiert werden müssen, nur in einer Anzahl von Fällen vorhanden, die im wesentlichen mit den hier synthetisch als lösbar angedeuteten zusammenfallen. (Zu den letzteren sind auch die mit den elliptischen Funktionen zusammenhängenden zu rechnen.)

#### 204) Bemerkungen über Periodizität.

a) Mit Hilfe zweier orthogonaler Parallelscharen kann man die Ebene in  $\infty^2$  Quadrate von endlichen Dimensionen einteilen. Jede Abbildung mit Hilfe algebraischer Funktionen verwandelt eine solche Einteilung wiederum in eine solche, bei der die Anzahl der Quadrate unendlich groß 2<sup>ter</sup> Ordnung ist. Soll die Abbildung auf  $\infty^1$  Quadrate führen, so sind transscendente Funktionen nötig, die einfache Periodizität besitzen. Soll nur eine endliche An-

zahl von Quadraten entstehen, so sind doppeltperiodische Funktionen erforderlich.

b) Mit Hilfe des Strahlenbüschels durch einen Punkt der concentrischen Kreisschar erhält man  $\infty^1$  „Quadrate“ von endlichen Dimensionen. Durch algebraische Abbildung der Zeichnung ergeben sich Isothermenscharen, die ebenfalls  $\infty^1$  Quadrate geben. Zum Übergange von Gruppe a) nach Gruppe b) dient z. B. die Abbildung  $Z = e^z$ , oder auch

$$Z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z, \quad Z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z,$$

u. s. w. Diese Abbildungen müssen wegen des Überganges von  $\infty^2$  zu  $\infty^1$  Quadraten einfach periodisch sein, ihre Umkehrungen unendlich vieldeutig. Bei  $Z = e^z$  ist die Periode imaginär, nämlich gleich  $2\pi i$ , bei  $Z = \cos z$  und  $Z = \sin z$  ist sie reell, gleich  $2\pi$ . Auch Kombinationen von transscendenten und algebraischen Funktionen, wie die unten zu behandelnde  $Z = z + e^z$ , ebenso algebraische Funktionen von transscendenten Funktionen teilen die Eigenschaft der einfachen Periodizität bzw. einfach unendlichen Vieldeutigkeit.

Auch bei algebraischen Funktionen, z. B. bei den irrationalen, kommt Vieldeutigkeit vor, diese ist aber im allgemeinen eine endliche. Den Übergang bilden Wurzeln mit irrationalen Exponenten, der ebenfalls auf unendliche Vieldeutigkeit führt.

Will man also die Einteilung der Ebene in eine endliche Anzahl von Quadraten ermöglichen, so muß man zu den doppeltperiodischen Funktionen übergehen, welche die reelle Periode der goniometrischen Funktionen und die imaginäre Periode der Exponentialfunktion in sich vereinigen. Die wichtigsten und einfachsten der damit zusammenhängenden Isothermenscharen findet man nebst Litteraturangaben in des Verfassers „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Die dortigen Figuren klären über das Notwendigste auf. Sie stehen nicht nur in Beziehungen zur Potentialtheorie, sondern auch zur Festigkeitslehre und sonstigen Gebieten. Einige Bemerkungen dazu sind schon in Bd. I der Ing.-Mathematik Seite 199 gemacht worden. Sie schliessen sich an den Fall des Quadrates und der quadratischen Weltkarte von Peirce an.

205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik und Potentialtheorie. Zur Behandlung der Gruppen a) und b) ist höhere Mathematik im allgemeinen zu entbehren, obwohl die elementare Behandlung unbequem werden kann. Aber schon die Behandlung der Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung macht die Anwendung der höheren Analysis wünschens-

wert. Gruppe c) aber tritt vollständig aus der Möglichkeit elementarer Behandlung heraus. Die Grenzlinie der letzteren ist also festgelegt durch die einfacheren transscendenten Funktionen, die als goniometrische und Exponentialfunktionen bezw. cyclometrische und logarithmische Funktionen auftreten. So große Fortschritte durch die höheren Funktionen auch erzielt werden können, man bleibt nach einem Ausspruche von Dubois-Reymond doch auf das Strandwasser des Ozeans der Funktionentheorie beschränkt.

Als Beispiele von Problemen, die sich an jener Grenzlinie befinden, sind im folgenden einige herausgegriffen. Obwohl die höhere Analysis vermieden ist, sind sie doch nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Andere mögen sie überschlagen. Aufgenommen wurden sie aus dem Grunde, weil durch sie die Theorie der Kondensatoren und der Schutzringe verfeinert wird, und weil sie zweitens in die berühmten Arbeiten von Helmholtz und Kirchhoff über die Theorie der freien Ausflusstrahlen einführen und ein neues Licht auf die schon vielfach besprochenen hydrodynamischen Analogien werfen. Man wird daraus entnehmen, von welcher Bedeutung die Methode der konformen Abbildung für viele Teile der mathematischen Physik ist. Auf diesem Gebiete findet sich noch mancherlei lohnende Arbeit für den angehenden Forscher.

206) Die Abbildung  $Z = z + e^z$ . Diese Abbildung ist zuerst von Helmholtz für hydrodynamische Zwecke behandelt worden. Sie giebt aber auch die Theorie der ebenen Kondensatoren und des Schutzringes am Thomsonschen Elektrometer. Sie soll hier ganz elementar behandelt werden.

Aus

$$Z = z + e^z$$

oder

$$X + Yi = (x + yi) + e^{(x+yi)} = x + yi + e^x e^{yi} = x + yi + e^x (\cos y + i \sin y)$$

folgt durch Gleichsetzung der reellen und ebenso der imaginären Teile

$$1) \quad X = x + e^x \cos y,$$

$$2) \quad Y = y + e^x \sin y.$$

Für jeden Punkt  $x, y$  der  $z$ -Ebene kann man also die Koordinaten  $X, Y$  des ihm entsprechenden der  $Z$ -Ebene berechnen und so durch Rechnung die Abbildung ausführen.

Es fragt sich, was für Kurven den Geraden  $x = a$  und  $y = b$  in der  $Z$ -Ebene entsprechen. Setzt man in beiden Gleichungen  $x = a$ , so erhält man

$$X = a + e^a \cos y, \quad Y = y + e^a \sin y.$$

Aus der ersteren kann man  $\cos y$  berechnen, daraus  $y$  und  $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$  bestimmen und beides in die zweite einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Geraden  $x = a$  entsprechenden Kurven

$$Y = \arccos \frac{X-a}{e^a} + e^a \sqrt{1 - \left(\frac{X-a}{e^a}\right)^2}$$

oder

$$3) \quad Y = \arccos \frac{X-a}{e^a} + \sqrt{e^{2a} - (X-a)^2}.$$

Dafür kann man auch schreiben

$$3^*) \quad X = e^a \cos [Y - \sqrt{e^{2a} - (X-a)^2}] + a.$$

Der Geraden  $x = 0$  z. B. entspricht die Kurve

$$4) \quad Y = \arccos X + \sqrt{1 - X^2}$$

$$4^*) \quad X = \cos [Y - \sqrt{1 - X^2}].$$

Setzt man dagegen  $y = b$  in die Gleichungen 1) und 2) ein, so entsteht

$$X = x + e^x \cos b, \quad Y = b + e^x \sin b.$$

Aus der zweiten kann man  $e^x$ , also auch  $x$  berechnen und beides in die erste einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Geraden  $y = b$  entsprechenden Kurven

$$X = \lg \frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\sin b} \cos b$$

oder

$$5) \quad X = \lg \frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\tan b},$$

wofür man auch schreiben kann

$$5^*) \quad Y = \sin b \left[ e^{X - \frac{Y-b}{\tan b}} \right] + b.$$

Ist z. B.  $b = 0$ , so ist auch  $Y = 0$ , d. h. die  $X$ -Achsen beider Ebenen entsprechen einander. Ist ferner  $b = \pm \pi$ , so ist auch  $Y = \pm \pi$ , so daß auch die Geraden  $y = \pm \pi$  und  $Y = \pm \pi$  einander entsprechen.

Man hat nun zu untersuchen, auf welche Strecken hin dieses gegenseitige Entsprechen der Geraden stattfindet.

Setzt man  $y = 0$  und geht man dann in der  $x$ -Ebene von  $x = -\infty$  bis  $x = 0$  und von da nach  $x = +\infty$ , so geht man nach 1) in der  $Z$ -Ebene von  $-\infty + e^{-\infty} \cos 0$  oder  $-\infty$  nach  $0 + e^0 \cos y = +1$  und von da nach  $+\infty + e^{+\infty} \cos 0 = +\infty$ . Beide Geraden entsprechen einander in ihrer ganzen Länge, nur entspricht dem Punkte  $x = 0$  der Punkt  $X = +1$ .

Setzt man dagegen  $y = \pi$  und macht man in der  $z$ -Ebene wieder den Weg von  $x = -\infty$  über  $x = 0$  nach  $x = +\infty$  auf dieser Linie, so geht man in der  $Z$ -Ebene auf der Geraden  $Y = \pi$  von  $X = -\infty + e^{-\infty} \cdot \cos \pi = -\infty$  nach  $0 + e^0 \cdot \cos \pi = -1$  und dann nach  $\infty + e^{\infty} \cdot \cos \pi = \infty - e^{\infty} = \infty - \left(1 + \frac{\infty}{1} + \frac{\infty^2}{1 \cdot 2} + \frac{\infty^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right) = -\infty$ . Dem Wege von  $-\infty$  über  $0$  nach  $+\infty$  in der  $z$ -Ebene entspricht also jetzt der Weg von  $-\infty$  nach  $-1$  und von da zurück nach  $-\infty$ . Der Punkt mit den Koordinaten  $Y = \pi$  und  $X = -1$  ist also eine singuläre Stelle, deren Bedeutung noch näher auseinander zu setzen ist.

Ebenso ist es aus Symmetriegründen mit den Geraden  $y = -\pi$  bzw.  $Y = -\pi$ , so daß auch der Punkt  $Y = -\pi$ ,  $X = -1$  von singulärer Bedeutung ist.

Man beschränke die Betrachtung in der  $z$ -Ebene zunächst auf einen horizontalen Streifen von der Breite  $2\pi$ , der von den Geraden  $y = \pm \pi$  eingeschlossen, aber im übrigen unbegrenzt ist.

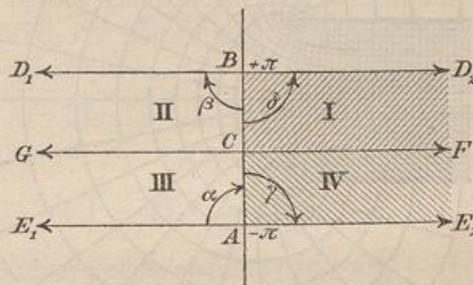
Wie die Abbildung  $Z = e^z$  diesen Streifen auf die gesamte  $Z$ -Ebene überträgt, ist dies auch bei unserer Abbildung  $Z = z + e^z$  der Fall, aber in anderer Weise. Entsprechen für die vier Quadranten des Streifens zunächst ganz roh dargestellt, wobei die Pfeile andeuten, daß die Linien sich bis ins Unendliche erstrecken. In der  $Z$ -Ebene ist die Schraffierung nach außen bis ins Unendliche fortzusetzen, der weiß gelassene Streifen ist jedoch von der Kurve  $BCA$  begrenzt, deren Gleichung in Nr. 4 gegeben war.

Denkt man sich den Streifen der  $z$ -Ebene in 24 horizontale Parallelstreifen zerlegt und dann von  $x = 0$  aus durch Senkrechte in regelrechte Quadrate eingeteilt, so giebt die Berechnung der den Eckpunkten der Quadrate in der andern Ebene entsprechenden Punkte die Fig. 144c.

Unter den Kurven, die den horizontalen Parallelen entsprechen, sind zwei von besonderer Bedeutung, die den Parallelen  $y = \pm \frac{\pi}{2}$

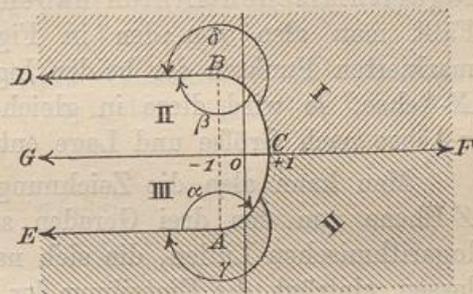
$z$ -Ebene.

Fig. 144 a.



$Z$ -Ebene.

Fig. 144 b.



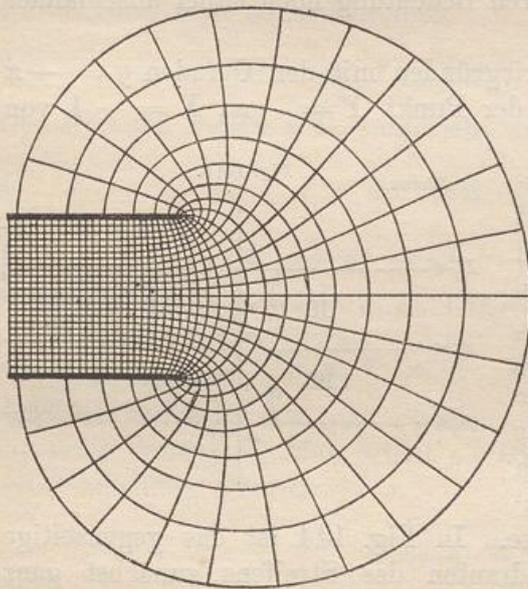
entsprechenden. Setzt man diesen Wert ein, so geht Gleichung 5\*) über in

$$6) \quad Y = e^x + \frac{\pi}{2}, \quad \text{bezw.} \quad Y = -e^x - \frac{\pi}{2}.$$

Dies sind die Gleichungen zweier logarithmischen Linien. (Rechts von der X-Achse aus nach oben und unten gezählt handelt es sich

Z-Ebene.

Fig. 144 c.



um die  $\pm 6^{\text{te}}$  Kurve.) Die erstere unterscheidet sich nur dadurch von der Kurve

$$Y = e^x, \quad \text{dafs sie um } \frac{\pi}{2} \text{ nach}$$

oben verschoben ist. Die andere ist das Spiegelbild der verschobenen Kurve in Bezug auf die X-Achse.

Setzt man aber  $y = \pm \frac{\pi}{2}$ , so geht die Gleichung 1) über in  $X = x + e^x \cdot \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$  oder in

$$X = x,$$

d. h. die Punkte auf den Geraden  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  und die entsprechenden auf den durch 6) dargestellten

logarithmischen Linien haben übereinstimmende Abscissen. Fällt man also von den in Fig. 144 c durch die Quadrattteilung markierten Punkten der beiden logarithmischen Linien Lote auf die X-Achse, so wird diese in gleiche Stücke eingeteilt, die denen der x-Achse nach Gröfse und Lage entsprechen.

Man kann also die Zeichnung vereinfachen, indem man in der Z-Ebene von den drei Geraden ausgeht, die beiden symmetrischen logarithmischen Linien, die sich nach Nr. 161 elementar konstruieren lassen, einträgt, die Einteilung der x-Achse hilfsweise auf die X-Achse überträgt, Lote errichtet und so auf den logarithmischen Linien die Schnittpunkte der den Linien  $x = a$  entsprechenden Kurven aufträgt, die eine quadratische Einteilung geben.

Die Funktion  $Z = z + e^z$  ist eine einfach periodische mit der Periode  $2\pi$ , ihre Umkehrung also unendlich vieldeutig. Es fragt sich, was den sich anschließenden Parallelstreifen der z-Ebene entspricht. Die Antwort ergibt sich, sobald man  $y$  z. B. gleich  $c + 2\pi$ ,  $\pi + 2\pi$ ,

$-\pi + 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} - 2\pi$  setzt. Dem nächsten oberen Streifen der  $z$ -Ebene von Breite  $2\pi$  entspricht dieselbe Figur noch einmal, jedoch um  $2\pi$  nach oben verschoben. Man kann sich diese zweite Ebene mit ihrer Zeichnung als eine zweite Schicht denken, die über der andern liegt. Dasselbe kann man mit der Verschiebung um  $-2\pi$  machen und diese Schicht unter der ursprünglichen denken, und so kann man mit  $\pm 4\pi$ ,  $\pm 6\pi$ ,  $\pm 8\pi \dots$  fortfahren. Dadurch erhalten sämtliche an den horizontalen Grenzlinien scheinbar unterbrochenen Kurven ihre Fortsetzungen. Zeichnet man diese, so sind sämtliche Geraden  $Y = \pm n\pi$  Symmetrieachsen der Gesamtzeichnung.

Die Kurve, die der Geraden  $x = 0$  entspricht, geht dann ähnlich, wie die als Cykloide bezeichnete Rollkurve des Einheitskreises auf der Linie  $X = -1$  nach oben. Sie ist in der That eine Cykloide. Die Gleichung einer solchen wird in den Lehrbüchern mit Hilfe einer dritten Variablen  $w$  in der Regel durch die Gleichungen  $x = w - \sin w$  und  $y = 1 - \cos w$  dargestellt. Elimination von  $w$  giebt dort als Gleichung  $x = \arccos(1 - y) - \sqrt{1 - (1 - y)^2}$ . Wegen der Drehung um  $90^\circ$  ist hier  $x$  und  $y$  zu vertauschen, was

$$y = \arccos(1 - x) - \sqrt{1 - (1 - x)^2}$$

giebt. Das Koordinatensystem ist aber gegen das unsrige um 1 verschoben. Setzt man  $x = X + 1$ , so wird die Gleichung

$$Y = \arccos X - \sqrt{1 - X^2}, \quad \text{oder} \quad X = \cos(Y + \sqrt{1 - X^2}),$$

was mit 6) bis auf das unwesentliche Wurzelzeichen (beide Zeichen sind richtig) übereinstimmt. Die Kurve  $ABC$  ist also in der That eine Cykloide.

In gleicher Weise sind die übrigen Wellenlinien und Ovale gedehnte bzw. verschlungene Cykloiden. Die Gleichung der letzteren wird in der Regel durch

$$x = w - c \sin w$$

$$y = 1 - c \cos w$$

dargestellt. Elimination von  $w$  ergibt als Gleichung

$$x = \arccos \frac{1 - y}{c} - c \sqrt{1 - \left(\frac{1 - y}{c}\right)^2}$$

oder bei Vertauschung von  $x$  und  $y$

$$y = \arccos \frac{1 - x}{c} - c \sqrt{1 - \left(\frac{1 - x}{c}\right)^2}$$

Setzt man  $1 - x = X - a$ , also  $x = 1 + a - X$  ein, so wird die Gleichung

$$Y = \arccos \frac{X - a}{c} - c \sqrt{1 - \left(\frac{X - a}{c}\right)^2}.$$

Man hat nur noch  $c = e^a$  zu setzen, um die Übereinstimmung mit Gleichung 3) bzw. 3\*) herbeizuführen. Folglich: Sämtliche Niveau-  
linien sind gedehnte bzw. verschlungene Cykloiden, deren  
Rollkreis den Radius 1 hat, so daß ihre Periode gleich  $2\pi$   
wird.

Hieraus ergibt sich eine Fülle von geometrischen Beziehungen,  
auf die nicht näher eingegangen werden soll. Wir gehen vielmehr  
vor weiteren Untersuchungen zu physikalischen Deutungen über.

207) Hydrodynamische Deutung. Man denke sich einen überall  
gleich tiefen langsam fließenden Strom zwischen parallelen Molen weit  
in einen überall gleich tiefen See geleitet. Reibungs- und Beharrungs-  
störungen werden als nicht vorhanden angenommen, so daß die Strom-  
bewegung etwa der verlangsamten des elektrischen Fluidums entspricht.  
Die Zeichnung stellt die Stromlinien und die Linien gleichen Ge-  
schwindigkeitspotentials dar. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt  
proportional den Dimensionen der Quadrate. An jeder Stelle der  
Molen herrscht innen eine größere Geschwindigkeit, außen eine weit  
kleinere. Dem Innen- und Außenpunkte jeder Stelle entsprechen  
zwei getrennte Stellen der Grenzlinie des Streifens der  $z$ -Ebenen, die  
man durch einfaches Abzählen der Stromlinien bis zur Cykloide hin  
bestimmen kann. Man kann auch die betreffenden Niveau-  
linien bis zur logarithmischen Linie verfolgen und dann die Schnittpunkte auf  
die  $X$ -Achse projizieren, was ebenfalls die beiden Abscissen giebt.  
Dadurch hat man gewissermaßen eine graphische Lösungsmethode  
der transscendenten Gleichung

$$X = x + e^x \cos \pi \quad \text{oder} \quad X = x - e^x,$$

wobei  $X$  gegeben,  $x$  berechnet werden soll. Diese Methode ist ebenso  
genau wie die übliche arithmetische Annäherungsmethode, nach welcher  
man zur Auffindung des ersten Wertes zu schreiben hat

$$1) \quad x_1 = X + e^{x_1} = X + e^{X + e^{x_1}} = X + e^{X + e^{X + e^{x_1}}} = \dots$$

Den zweiten Wert findet man mit Hilfe der Gleichung  $e^{x_2} = -X + x_2$   
oder

$$2) \quad x_2 = \lg(-X + x_2) = \lg[-X + \lg(-X + x_2)] \\ = \lg\{-X + \lg[-X + \lg(-X + x_2)]\} = \dots$$

Damit ist zugleich die Frage nach der Umkehrung der Abbildung  $Z = z + e^z$  beantwortet, bei der analoge Gleichungen, wie 1) und 2), jedoch für  $z$  aufzustellen sind. Sind  $Z_1$  und  $Z_2$ , ebenso  $z_1$  und  $z_2$  unendlich benachbarte zusammengehörige Werte, so findet man für

$$\begin{aligned} \frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2} &= \frac{(z_1 + e^{z_1}) - (z_2 + e^{z_2})}{z_1 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2} + \frac{e^{z_1} - e^{z_2}}{z_1 - z_2} = 1 + e^z \\ &= 1 + e^{x+yi} = 1 + e^x (\cos y + i \sin y), \end{aligned}$$

wo  $z = x + yi$  der Mittelpunkt der unendlich benachbarten  $z_1$  und  $z_2$  ist. Statt  $(Z_1 - Z_2) = (z_1 - z_2)(1 + e^z)$  kann man, wenn die Punkte  $Z_1$  und  $Z_2$  auf dem Molenrande liegen, schreiben

$$\begin{aligned} (X_1 + \pi i) - (X_2 + \pi i) &= [(x_1 + \pi i) - (x_2 + \pi i)] \\ &\cdot [1 + e^x (\cos \pi + i \sin \pi)], \end{aligned}$$

oder einfacher

$$(X_1 - X_2) = (x_1 - x_2) \cdot [1 - e^x].$$

So erkennt man, daß die kleine Molenstrecke  $(X_1 - X_2)$  das  $(1 - e^x)$ fache der entsprechenden kleinen Strecke der Streifengrenze ist. Mit anderen Worten: Man hat das Vergrößerungsverhältnis  $(1 - e^x)$  zwischen den an den Molo anstoßenden Quadraten und den zugehörigen des Streifens der  $z$ -Ebene gefunden.

Für  $x = -\infty$  handelt es sich um  $1 - \frac{1}{e^\infty} = 1$ . D. h. je größer der negative Abstand vom Nullpunkte der  $z$ -Ebene ist, um so mehr stimmen die Quadrate in der Größe überein. Für  $x = 0$  ist das Vergrößerungsverhältnis das  $(1 - e^0) = (1 - 1) = 0$ fache, d. h. an den kritischen Stellen  $A$  und  $B$  werden die Quadrate der  $Z$ -Ebene unendlich klein gegen die der  $z$ -Ebene. Auf der Aufsenseite nehmen dann nach links hin die Quadrate schnell zu, z. B. gilt für  $x = 1$  der absolut zu nehmende Betrag des Ausdrucks  $(1 - e^1)$  als Vergrößerungsverhältnis, so daß es sich um das  $(e^1 - 1) = 1,718 \dots$  fache handelt, bei  $x = 10$  um das  $(e^{10} - 1)$ fache, bei  $x = \infty$  um das  $(e^\infty - 1)$  oder  $\infty$ fache. Durch die reciproken Werte sind die Geschwindigkeiten bestimmt. An den Stellen  $A$  und  $B$  wird die Geschwindigkeit unendlich groß, was bei gewöhnlichen Flüssigkeiten ohne ein Zerreißen des Zusammenhangs nicht denkbar ist. Der Molo ist übrigens keine mathematische Linie, sondern ein Körper. Abrundung hebt diese Schwierigkeit auf. Für Helmholtz war die Bemerkung über die unendliche Geschwindigkeit der Anlaß, seine Theorie diskontinuierlicher Flüssigkeitsbewegungen und die der freien Ausflusstrahlen im zweidimensionalen Raume anzubahnen, worin ihm dann Kirchhoff gefolgt ist.

208) Elektrostatische Deutungen für zwei Halbebenen als Kondensatoren. Der eine Molo stellt eine normal zur Zeichnungsebene stehende Platte dar, also eine Halbebene, die im übrigen unbegrenzt ist, der andere eine parallele Halbebene. Ladet man die eine mit positiver Elektrizität, so entsteht auf der anderen nach Ableitung zur Erde dieselbe Menge negativer Influenzelektrizität. (Vgl. Nr. 74 und 75.) Nach den früheren Betrachtungen sind die elektrischen Belegungen derartig angeordnet, daß auf die an den Kondensator anstossenden Quadrate der Zeichnung gleiche Mengen kommen, d. h. die Dichtigkeit der Belegungen ist umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate.

Daraus geht hervor, daß nicht nur die Innenseite, sondern auch die Außenseite der oberen Kondensatorplatte mit positiver Elektrizität belegt ist. Nach links hin wird die Belegung im Innern sehr bald homogen, im Außern nimmt die Dichtigkeit allmählich zu Null ab. In den kritischen Punkten *A* und *B* aber wird, wenn die Platte unendlich dünn ist, die Dichte unendlich groß. Da aber in Wirklichkeit die Platte eine endliche Dicke hat und bei *A* und *B* abgerundet sein kann, ist man imstande, die daraus folgenden übergroßen Spannungen und Büschelentladungen zu vermeiden.

Der Schwerpunkt für je zwei gegenüberliegende elektrische Teilchen beider Platten liegt in unendlicher Entfernung. Dasselbe gilt also überhaupt von den Belegungen jedes Doppelstreifens des Kondensators. Folglich: Die Asymptoten der einen Kurvengruppe schneiden die *X*-Achse in unendlicher Entfernung. Von denen der beiden logarithmischen Linien ist dies bekannt.

Entfernt man die Platten weit voneinander, wobei sich nur die Ordinaten ihrer Punkte ändern sollen, so erhält man an jeder Platte Kraft- und Niveaulinien, die zwei Scharen konfokaler Parabeln darstellen. Da diese Symmetrie giebt, ist allmählich die Belegung auf beiden Seiten gleich groß geworden. Dies giebt einen Einblick in die Influenzbewegungen der Elektrizität beim Nähern oder Entfernen der einen Platte von der ruhenden anderen.

209) Thomsonscher Schutzring. Man bringe die Platten in die alte Lage zurück, denke sich aber in der einen irgendwo links von *A* eine durchgehende kleine Unterbrechung, wobei jedoch eine leitende Verbindung bestehen bleiben soll, dann tritt nur ein sehr kleines Bündel von Niveaulinien durch die Unterbrechung hindurch, im übrigen aber bleibt alles unverändert, d. h. die quadratische Einteilung bleibt im wesentlichen dieselbe, insbesondere bleibt die Belegung links von der Unterbrechung fast vollständig homogen. So erkennt man die Ein-

wirkung des Thomsonschen Schutzringes zunächst für unendlich große Kondensatorplatten bezüglich der Festhaltung der Homogenität des zwischen den Platten liegenden Feldes. Die Deformationen der Geraden nehmen erst in größerer Entfernung rechts von der Unterbrechung wahrnehmbare Größe an. Vgl. Nr. 76.

210) Die Cylinder der logarithmischen und anderer Linien als Kondensatorplatten. Da nach obigem auf Linienstücke (bezw. Flächenstücke), deren Projektionen auf die  $X$ -Achse gleich lang sind, gleiche Belegungen kommen, so ist das entsprechende Problem als vollständig gelöst zu betrachten, sowohl für die beiden logarithmischen Linien, als auch für eine von ihnen und eine der drei Geraden der Figur. Auch das Influenzproblem zwischen Halbebene und ganzer Ebene ( $X$ -Achse) ist gelöst. Auch mit den übrigen Kurven kann man entsprechendes leisten.

Auf Wärme-, Elektrizitätsströmungen u. dgl. soll jetzt nicht eingegangen werden, auch nicht auf die nahe liegenden Vertauschungsprobleme bezw. die etwas unbequemer zu behandelnden Diagonalprobleme. Sämtliche Aufgaben bieten instruktives Übungsmaterial.

[211) Beispiel zur Theorie der freien Ausflusstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff. Vorgeschrittenere Leser mögen ihre Kraft an einer ebenfalls elementar zu behandelnden Abbildungsaufgabe versuchen, von der nur die Resultate der Einzelrechnungen angegeben werden sollen. An dieser soll die neuere Theorie der freien Ausflusstrahlen erläutert werden.

Es sei wiederum  $Z = X + Yi$  und  $z = x + yi$ . Die abbildende Funktion ist

$$1) \quad Z = 1 - e^{-z} - \sqrt{e^{-2z} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2z} - 1}.$$

Es soll untersucht werden, welches Flächengebiet der  $Z$ -Ebene einem unbegrenzten horizontalen Parallelstreifen der  $z$ -Ebene von der Breite  $\pi$  entspricht, z. B. dem von den Linien  $y = 0$  und  $y = \pi$  begrenzten, und zwar soll der negative (linke) Teil des Streifens zuerst, der positive (rechte) Teil zuletzt betrachtet werden.

Setzt man  $y = 0$ , so geht 1) über in

$$2) \quad X = 1 - e^{-x} - \sqrt{e^{-2x} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2x} - 1}.$$

Von  $x = -\infty$  bis  $x = 0$  bleibt der Ausdruck reell, so daß der imaginäre Teil von  $Z$  für diese Strecke

$$2*) \quad Y = 0$$

ist. Die Strecke von  $A$  über  $C$  bis  $-\infty$  der  $z$ -Ebene entspricht also der Strecke von  $A$  über  $C$  bis  $-\infty$  der  $Z$ -Ebene.

Wird aber  $x$  positiv, so treten in 2) imaginäre Teile auf. Dabei ist zu beachten, daß

$$\arctan ia = \frac{i}{2} \lg \frac{1+a}{1-a}$$

ist. Trennung der reellen und imaginären Teile giebt

$$3) \quad X = 1 - e^{-x}$$

$$3^*) \quad Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

Durch 2, 2\*) und 3, 3\*) ist es möglich, für jeden Punkt der  $x$ -Achse in der  $z$ -Ebene die Koordinaten der entsprechenden Punkte der  $Z$ -Ebene zu finden. Der Strecke  $-\infty, C, A, H, +\infty$  in der  $z$ -Ebene entspricht in der  $Z$ -Ebene die Gerade  $-\infty, C, A$  und die Kurve  $AH$  u. s. w. Für  $x = +\infty$  folgt aus 3)  $X = 1, Y = -\infty$ , so daß die Gerade  $X = 1$  die senkrechte Asymptote der Kurve  $AH$  wird.

Setzt man dagegen  $y = \pi$ , so geht 1) über in

$$Z = 1 - e^{-(x+\pi i)} - \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1}$$

oder

$$Z = 1 - e^{-x} (\cos \pi - i \sin \pi) - \sqrt{e^{-2x} (\cos 2\pi - i \sin 2\pi) - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2x} (\cos 2\pi - i \sin 2\pi) - 1}.$$

Für die Strecke von  $o$  bis  $-\infty$  giebt die Zerlegung in den reellen und imaginären Teil

$$4) \quad X = 1 + e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1} + \pi - \arctan \sqrt{e^{-2x} - 1},$$

$$4^*) \quad Y = o,$$

insbesondere entsprechen einander  $x = -\infty$  und  $X = +\infty$ ,  $x = o$  und  $X = 2 + \pi$ .

Da jedoch für positives  $x$  die Wurzeln imaginär werden, so ist für solches eine andere Zerlegung gültig. Man erhält

$$5) \quad X = 1 + e^{-x} + \pi,$$

$$6) \quad Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}},$$

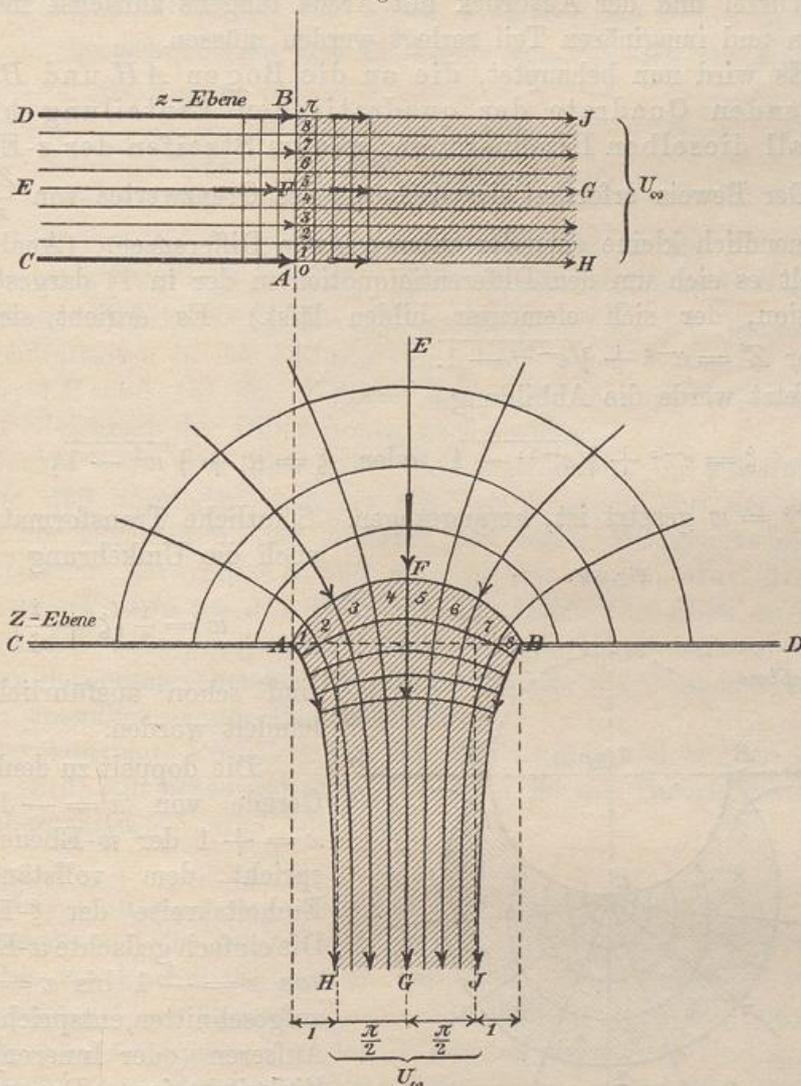
wobei wiederum die Formel für  $\arctan ia$  Anwendung gefunden hat.

Der Geraden  $y = \pi$  von  $-\infty$  über  $D, B, J$  nach  $+\infty$  entspricht also die  $X$ -Achse von  $+\infty$  über  $D$  nach  $B$ , wo  $X = 2 + \pi$

ist, dann kommt eine Kurve von  $B$  über  $J$  nach dem unendlichen Bereiche mit der Asymptote  $X = 1 + \pi$ .

Der symmetrisch teilenden Geraden  $y = \frac{\pi}{2}$  entspricht die Symmetrieachse  $X = 1 + \frac{\pi}{2}$ . Fig. 145 erläutert diese Beziehungen in hinreichender Weise. Die linke Hälfte des Streifens der  $z$ -Ebene

Fig. 145.



entspricht der oberen Halbebene der  $Z$ -Ebene mit Ausschluss einer Fläche  $AFB$ , deren Grenze der Geraden  $x = 0$  entspricht. Da für  $x = 0$  Gleichung 1) in

$$Z = 1 - e^{-yi} - \sqrt{e^{-2yi} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2yi} - 1}$$



interessiert nur die in Fig. 146 hervorgehobene Sichel. Durch die Abbildung  $w = e^{-z}$  geht die einfach gedachte  $w$ -Ebene in einen Parallelstreifen von der Breite  $2\pi$  über, die Halbebene in den hier untersuchten Parallelstreifen von Breite  $\pi$ . Durch Buchstaben und Zahlen ist das gegenseitige Entsprechen der  $Z$ -Ebene, der  $z$ -Ebene und der  $\xi$ -Ebene hinreichend klargelegt, das Strömen ist durch Pfeile angedeutet.

Der absolute Betrag von  $\xi = \xi + i\eta = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  ist gleich  $\rho$ . Bezeichnet man also die Länge von  $Z_1 - Z_2$  als  $\overline{Z_1 Z_2}$ , die von  $z_1 - z_2$  als  $\overline{z_1 z_2}$ , so ist

$$\frac{\overline{Z_1 Z_2}}{\overline{z_1 z_2}} = \rho \quad \text{oder} \quad \overline{Z_1 Z_2} = \rho \cdot \overline{z_1 z_2}.$$

(Vgl. Einf. in die isogonalen Verwandtschaften § 39.) Für den Einheitskreis ist aber  $\rho = 1$ , also ist für diesen und die entsprechenden Punkte der Grenzkurve in der  $Z$ -Ebene  $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{z_1 z_2}$ , d. h. die Längen der Quadratseiten in der  $z$ -Ebene sind gleich denen der an die Grenzkurven  $AH$  und  $BJ$  der  $Z$ -Ebene stossenden Quadratseiten. Damit ist die Gleichheit der Dimensionen nachgewiesen.

Denkt man sich also eine Wasserströmung im Streifen der  $z$ -Ebene und vergleicht man sie mit der Strömung aus der oberen Hälfte der  $Z$ -Ebene in den zunächst mit festen Wänden versehenen Ausflußkanal, der von  $AH$  und  $BJ$  begrenzt ist, so sind die Geschwindigkeiten an den Wänden des letzteren eben so groß wie an der Streifengrenze. Dabei ist die Figur nur als Grundriffsfigur der entsprechenden Ebenen zu denken, die Öffnung  $AB$  also als ein unendlich langer Parallelschlitz.

Der konstante Charakter der Randgeschwindigkeit ist, wie § 212 zeigen wird, von hervorragender Bedeutung für die Theorie der freien Ausflußstrahlen.]

[212) Deutung des Problems im Helmholtzschen Sinne. Man denke sich in der  $z$ -Ebene parallele Wände  $DB$  und  $CA$ , die links bis ins Unendliche reichen und darin ein Strömung von links nach rechts in den übrigen wassererfüllten Raum. Ist die Bewegung langsam und sieht man von der Beharrung ab, so würde Fig. 144c maßgebend sein. Bei dieser Figur wurde darauf aufmerksam gemacht, daß an der Grenze des Ausflusses unendliche Geschwindigkeiten erforderlich sein würden, so daß dort der Zusammenhang der Flüssigkeit gestört werden müßte. Die Beobachtung zeigt daher auch ganz anderes. Der Strahl schießt zunächst kompakt in die ruhende Flüssigkeit des Gesamtraums hinein, um sich um so später und in um

so größerer Entfernung in Wirbeln aufzulösen, je größer die Geschwindigkeit ist. Man hat also dann auf eine längere Strecke bewegte und ruhende Flüssigkeit nebeneinander, beide durch scheinbar feste Wände begrenzt. Dazu ist aber nötig, daß die Differenz zwischen  $v$  und  $0$  groß genug ist, den Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit aufzuheben bzw. unmöglich zu machen. Jetzt möge  $v$  gerade die Grenzgeschwindigkeit sein.

In der  $Z$ -Ebene handelt es sich dann um folgendes: Man denke sich zwei Gefäße, die durch die Ebenen  $CA$  und  $BD$  begrenzt sind, so daß aus dem oberen in das untere durch den Schlitz  $AB$  Wasser überströmen kann. Die Theorie verlangt, daß den Strom- und Niveaulinien der  $z$ -Ebene solche der  $Z$ -Ebene entsprechen. Da aber der Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit bei einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  aufgehoben wird, so muß die Grenzlinie des Strahles so beschaffen sein, daß sie erstens eine Stromlinie ist, die auf die ruhende Flüssigkeit keinen Druck ausübt, daß zweitens die Geschwindigkeit in ihr überall gleich jenem  $v$  ist. Änderte sich nämlich in der die Grenze bildenden Kraftlinie die Geschwindigkeit, so würde eine Einengung oder Verbreiterung stattfinden wollen, was einen negativen oder positiven Druck auf die ruhende Flüssigkeit geben würde. — Die Abbildung  $z = f(z)$  hat also so zu geschehen, daß der absolute Betrag  $\rho$  von  $\frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}$  gleich 1 ist. Dies war im obigen Beispiele der Fall. Jene Aufgabe ist also als gelöst zu betrachten. Wichtig ist bei dieser Theorie, daß man das wirkliche Maß der Kontraktion des Strahles erhält.]

[213) Andere Beispiele freier Ausflusstrahlen. Gelingt es, einen unbegrenzten Parallelstreifen so auf eine Fläche eindeutig abzubilden, daß ein Teil der Begrenzung der letzteren in den Dimensionen der anstossenden Quadrate mit denen der Quadrate des Streifens übereinstimmt, so ist im allgemeinen ein Problem für freie Ausflusstrahlen gelöst. (In der Sprache der Analysis würde die Methode folgendermaßen zu charakterisieren sein: Man bildet den Streifen der  $z$ -Ebene eindeutig auf eine Fläche der  $\xi$ -Ebene ab, zu deren Grenzen ein Stück des Einheitskreises gehört. Darauf sucht man das Integral  $Z$  der Funktion  $\xi = f(z)$ . Die Funktion  $Z$  löst dann das Problem.) In der 22. Vorlesung von Kirchhoffs Mechanik findet man mehrere Beispiele. Hat z. B. ein sehr tiefes Gefäß einen der Fig. 147 entsprechenden Ausflussschlitz, der weit höher liegt, als der Boden, so geschieht der Ausfluß nicht direkt an den inneren Wänden,

sondern so, daß die gezeichneten Kurven die freien Grenzen sind. Der schräg schraffierte Raum kann ruhende Flüssigkeit enthalten. Die lösende Funktion

$$Z = -i(e^{-2z} + z - 1 + e^{-z} \sqrt{e^{-2z} - 1} - \lg(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1}))$$

ist von Helmholtz als erstes Beispiel für diese Theorie bestimmt worden. Liegen die Grenzen (Fig. 148) nicht in gleicher Höhe, so

Fig. 147.

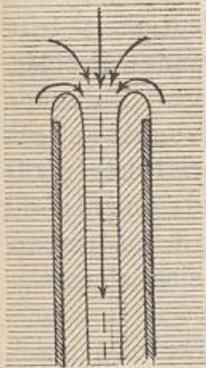


Fig. 148.

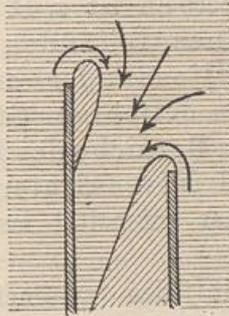
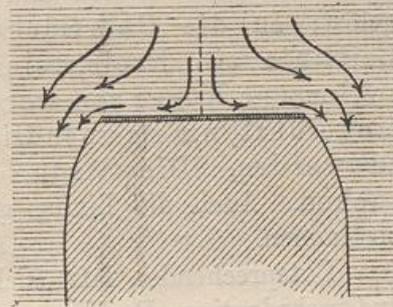


Fig. 149.



wird die Mittellinie des Strahles schräg, so daß er gegen die Wand anschlägt, was Störungen verursacht. Wird das Ausströmen durch eine in Fig. 149 dargestellte Platte gehemmt, so sind die dort gezeichneten die Grenzen der Ausströmung. Die abbildende Funktion ist

$$Z = 2\sqrt{z} + z \sqrt{\frac{1}{z} - 1} + \arcsin \sqrt{z}.$$

Die physikalischen Annahmen dieser Theorie sind am ausführlichsten in der Helmholtzschen Abhandlung über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen vom 23. April 1868 dargestellt, die in seine gesammelten Werke aufgenommen ist.

Die Besprechung der Theorie ist hier erfolgt, um irrümliche Deutungen der früheren Betrachtungen zu vermeiden.]

214) Übertragungen auf krumme Oberflächen. Gelingt es, eine gekrümmte Oberfläche in ein quadratisches Netz einzuteilen, so läßt sich jede der beiden Kurvengruppen als ein System von Stromlinien für gewisse Probleme stationärer Strömung betrachten. Dasselbe gilt von den Diagonalkurven des Netzes. Wie in der Ebene, so sind auch auf jeder Oberfläche unendlich viele Probleme durchführbar. Wie die Probleme der Ebene in gegenseitigen Beziehungen stehen, die durch Abbildung mittels Funktionen komplexen Arguments

wiedergegeben werden können, so stehen auch die verschiedenen Probleme auf derselben Oberfläche, ebenso die für verschiedene Oberflächen möglichen in gegenseitigen Beziehungen.

a) Abwickelbare Flächen. Jeder Sektor der Ebene läßt sich durch entsprechende Krümmung in einen geschlossenen Kegel verwandeln. Man rolle z. B. die Halbebene des symmetrischen Zweipunktproblems so zum Kegel zusammen, daß der Mittelpunkt der lemniskatischen Kurven zur Spitze des Kegels wird. Die Hälften der in der Ebene vollständigen Kurven schließen sich so zusammen, daß Eindeutigkeit an Stelle der ursprünglichen Zweideutigkeit tritt. Durch die Lemniskaten und Hyperbeln ist z. B. folgendes Problem gelöst: In die Oberfläche eines leitenden Kegels, dessen Leitlinie ein Kreis, eine Ellipse oder eine sonstige geschlossene Kurve sei, werde an beliebiger Stelle Elektrizität eingeführt, um im unendlichen Bereiche des Kegels abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen. Auch die Linien gleicher Intensität lassen sich elementar bestimmen.

Entsprechendes läßt sich mit jedem symmetrischen oder zwei- und mehrdeutigen Probleme symmetrischer Art machen, z. B. auch mit den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln. Zahlreiche der schon behandelten Figuren geben instruktive Modelle für das Verständnis der Strömungen auf krummen Oberflächen.

Ähnlich kann man mit den abwickelbaren Regelflächen verfahren. Gewisse Schraubenflächen gehören hierher. Das einfachste Beispiel ist naturgemäß der Cylinder, dessen quadratische Oberflächeneinteilung benutzt werden kann, Scharen von Schraubenlinien herzustellen, die ihn ebenfalls in Quadrate einteilen. Dagegen treten die Probleme, die sich auf nicht abwickelbare Regelflächen beziehen, z. B. auf das einmantelige Hyperboloid und hyperbolische Paraboloid, aus der elementaren Behandlungsweise heraus.

b) Die Kugel. Projiziert man die Kugelfläche von einem ihrer Punkte aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene, so geht bekanntlich jeder Kreis ihrer Oberfläche im allgemeinen in einen Kreis über. Zwei sich schneidende Kreise verwandeln sich dabei in Kreise, die sich unter demselben Winkel schneiden. Die Abbildung ist also eine isogonale, so daß kleine Dreiecke der Kugelfläche in ähnliche Dreiecke auf der Tangentialebene übergehen. In manchen Lehrbüchern der Elementarmathematik, z. B. im Method. Lehrbuch Bd. II des Verfassers Stereom. IX werden diese Sätze auf einfachem Wege abgeleitet. Für die Rückprojektion der Tangentialebene auf die Kugel mit Hilfe des Antipodenpunktes gilt dasselbe. Jede quadratische Einteilung der Ebene giebt also eine solche auf der Kugel, und durch Inversion kann

die letztere wieder in eine andere Kugelteilung umgeformt werden. Solche Einteilungen geben z. B. die Meridiane und Parallelkreise und ihre Diagonalkurven, die loxodromischen Linien, die bei der obigen Projektion in logarithmische Spiralen übergehen. Ähnliches gilt vom Kreisbüschel auf der Kugelfläche bei beliebig liegenden Büschelpunkten. (Auch die sphärischen Kegelschnitte machen eine Quadrateinteilung möglich, die jedoch auf elliptische Funktionen führt. Sie vermitteln die Abbildung der Kugelfläche auf Quadrat und Rechteck. Vgl. Ing.-Math. S. 199: Quadratische Weltkarte von Peirce.)

c) Drehungsflächen. Jede Drehungsfläche kann durch Meridiane und Parallelkreise quadratisch eingeteilt werden, z. B. das Drehungsellipsoid, Drehungsparaboloid, Drehungshyperboloid und verschiedene Ringflächen. Dasselbe gilt von gewissen Kanalfächen und den durch Reciprozität aus ihnen entstandenen. Manches läßt sich elementar durchführen. Vergl. die Abhandlung des Verfassers über die Abbildung der Cyklide in Bd. 94 des Crell. Journals, ebenso die über einige Aufgaben der darstellenden Geometrie im Progr. 1883 der Hagener Gewerbeschule und im 14. Jahrg. der Zeitschr. für math. Unterricht. Endlich noch die Abhandl. über gewisse transcendenten Flächen, welche die Cyklide als besonderen Fall enthalten im 94. Bande des Crell. Journals.

d) Schwieriger sind die allgemeinen Flächen zweiten Grades zu behandeln, noch mehr Schwierigkeiten bieten die höheren Grade. Auch die Oberflächen von Polyedern, besonders von regelmässigen, geben zu interessanten Aufgaben Anlaß.

Beispiele aus diesem Gebiete sollen nicht gegeben werden, da sie nur theoretischen Wert haben und in der Ingenieur-Wissenschaft kaum Anwendung finden. Mit diesen Bemerkungen soll das Kapitel von den zweidimensionalen Problemen abgeschlossen werden.