Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

163) Symmetrisches Zweipunktprpblem für gleiche Ladungen

Kapitel X.

Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme.

163) **Aufgabe.** In eine unbegrenzte homogene Platte ströme in zwei Punkten M_1 und M_2 unter gleichen Umständen Elektrizität ein, während die Ableitung in unendlicher Entfernung erfolgt. Die Strom- und Niveaulinien sollen ermittelt werden.

Auflösung. Die Potentialwerte $-c_1 \lg r_1$ und $-c_1 \lg r_2$ sind nach Nr. 79 für jeden Punkt der Ebene algebraisch zu summieren, so daſs es sich um

$$-c(\lg r_1 + \lg r_2) = -c_1 \lg (r_1 r_2)$$

handelt. Setzt man diesen Ausdruck gleich einer Konstanten $\varkappa$, so erhält man als Gleichung der Niveaulinien $-c_1 \lg (r_1 r_2) = \varkappa$, oder, wenn man $-\frac{\varkappa}{c_1} = c$ setzt

$$1) \qquad \lg r_1 + \lg r_2 = c, \text{ oder } \lg (r_1 r_2) = c, \text{ oder } r_1 r_2 = e^c.$$

Läſst man c die Werte einer arithmetischen Reihe annehmen, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Ringstreifen. Es handelt sich um die in Ing.-Math. Bd. I behandelten lemniskatischen Kurven 2. Ordnung, deren Bedeutung für die Trägheits- und Centrifugalmomente (vgl. Nr. 142, 147, 218, 234, 238, 281) und für die mathematische Physik überhaupt bereits hervorgehoben worden ist. Dort war gezeigt (Nr. 234), daſs die Orthogonalkurven dieser Schar ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bilden, deren Gleichung sich in der Form

$$2) \qquad \vartheta_1 + \vartheta_2 = c$$

schreiben läſst, wo ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungen der Vektoren r_1 und r_2 sind. Dies geht ohne weiteres aus dem in Nr. 162 dargestellten Vertauschungsprobleme hervor, für welches $\vartheta_1 = c_1$ und $\vartheta_2 = c_2$ die Bedeutung von Drehungspotentialen haben, die nach Analogie von Nr. 79 einfach zu summieren sind. Folgt auch hier c einer arithmetischen Reihe, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Streifen. Für die unendlich fernen Punkte jeder Kurve sind die Vektoren parallel, so daſs dann $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist und Gleichung 2) in $2\vartheta = c$ oder $\vartheta = \frac{c}{2}$ übergeht. Demnach folgen bei der gleichwertigen Einteilung die Asymptoten unter gleichen Winkeln aufeinander, die halb so groſs sind, wie die Schnittwinkel der benachbarten Hyperbeln.

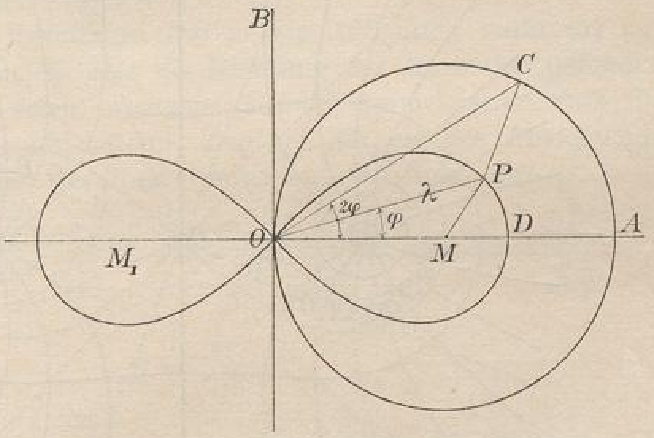
164) **Aufgabe.** Die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige „Rechtecke", z. B. in kleine „Quadrate" für dieses Problem konstruktiv auszuführen.

1. **Auflösung.** Man lege durch M_1 ein Strahlenbüschel, welches lauter kongruente Sektoren giebt, durch M_2 lege man ein kongruentes Büschel. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Netzes von Vierecken giebt das Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Damit ist ein einfaches Beispiel zu dem bekannten Satze gegeben, daſs die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Büschel auf einen Kegelschnitt führen. Die obige Gleichung 2) folgt daraus von selbst. Läſst man nämlich in $\vartheta_1 = n_1 c$ und $\vartheta_2 = n_2 c$ den Faktor n_1 um 1 zunehmen, während n_2 um 1 abnimmt, so bleibt

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = (n_1 + n_2)c$$

unverändert dieselbe Gröſse. Dies entspricht dem Ziehen der Diagonalkurven.

Fig. 123.



Jetzt lege man um M_1 diejenige koncentrische Kreisschar, die ähnliche „Rechtecke", z. B. „Quadrate" giebt; um M_2 lege man die kongruente Schar. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des Maschennetzes giebt die gesuchten konfokalen Lemniskaten 2. Ordnung. Läſst man nämlich in $\lg r_1 = n_1 c$ und $\lg r_2 = n_2 c$ die Faktoren n_1 und n_2 sich ebenso, wie vorher ändern, so bleibt $\lg r_1 + \lg r_2 = (n_1 + n_2)c$ eine konstante Gröſse.