Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

164) Einteilung der Ebene in kleine Quadrate durch radien und Kreise

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

von Drehungspotentialen haben, die nach Analogie von Nr. 79 einfach zu summieren sind. Folgt auch hier c einer arithmetischen Reihe, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Streifen. Für die unendlich fernen Punkte jeder Kurve sind die Vektoren parallel, so daſs dann $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist und Gleichung 2) in $2\vartheta = c$ oder $\vartheta = \frac{c}{2}$ übergeht. Demnach folgen bei der gleichwertigen Einteilung die Asymptoten unter gleichen Winkeln aufeinander, die halb so groſs sind, wie die Schnittwinkel der benachbarten Hyperbeln.

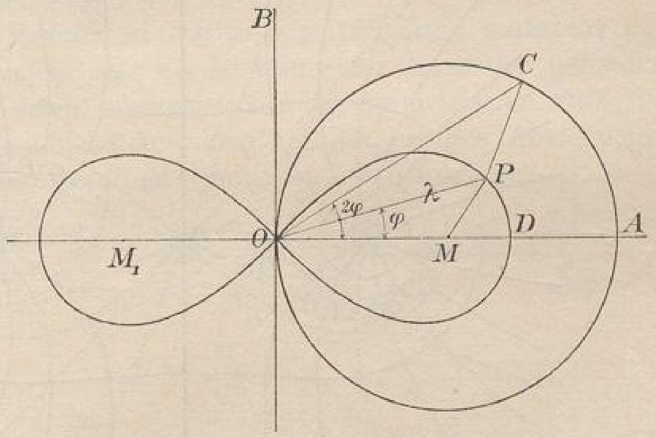
164) **Aufgabe.** Die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige „Rechtecke", z. B. in kleine „Quadrate" für dieses Problem konstruktiv auszuführen.

1. **Auflösung.** Man lege durch M_1 ein Strahlenbüschel, welches lauter kongruente Sektoren giebt, durch M_2 lege man ein kongruentes Büschel. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Netzes von Vierecken giebt das Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Damit ist ein einfaches Beispiel zu dem bekannten Satze gegeben, daſs die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Büschel auf einen Kegelschnitt führen. Die obige Gleichung 2) folgt daraus von selbst. Läſst man nämlich in $\vartheta_1 = n_1 c$ und $\vartheta_2 = n_2 c$ den Faktor n_1 um 1 zunehmen, während n_2 um 1 abnimmt, so bleibt

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = (n_1 + n_2) c$$

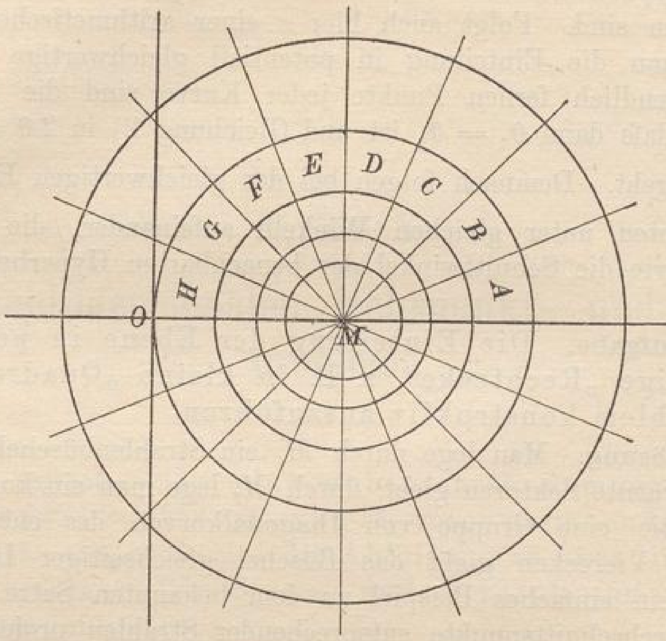
unverändert dieselbe Gröſse. Dies entspricht dem Ziehen der Diagonalkurven.

Fig. 123.



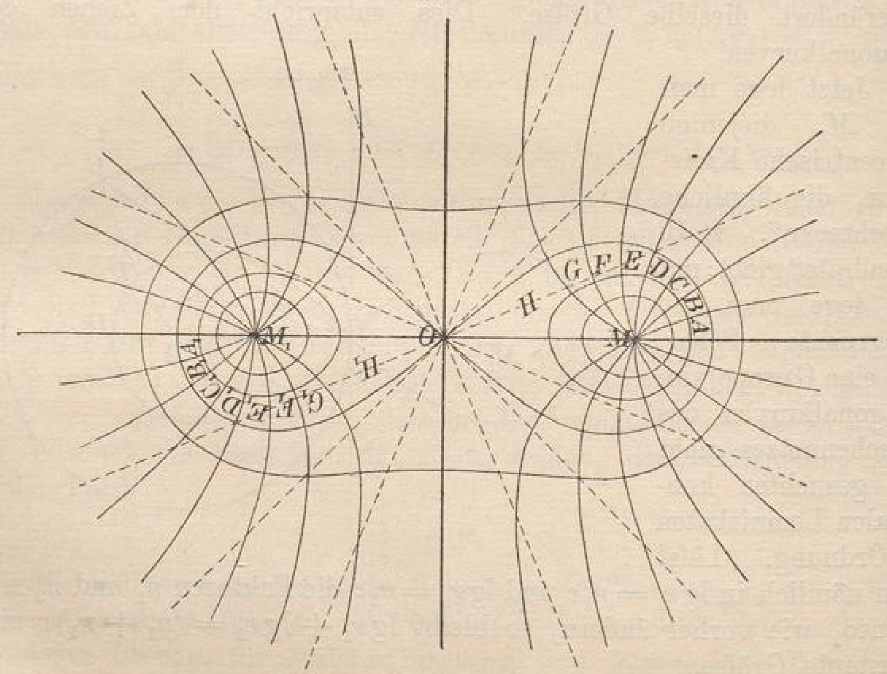
Jetzt lege man um M_1 diejenige koncentrische Kreisschar, die ähnliche „Rechtecke", z. B. „Quadrate" giebt; um M_2 lege man die kongruente Schar. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des Maschennetzes giebt die gesuchten konfokalen Lemniskaten 2. Ordnung. Läſst man nämlich in $\lg r_1 = n_1 c$ und $\lg r_2 = n_2 c$ die Faktoren n_1 und n_2 sich ebenso, wie vorher ändern, so bleibt $\lg r_1 + \lg r_2 = (n_1 + n_2) c$ eine konstante Gröſse.

Fig. 124.



2. Auflösung. In Abschnitt VI von Ing.-Math. Bd. I ist die lemniskatische Abbildung durchgeführt, d. h. für jeden Vektor OC ist die Winkelhalbierende OP eingeschaltet, deren Länge $= \sqrt{OM \cdot OC} = \sqrt{1 \cdot OC}$

Fig. 125.

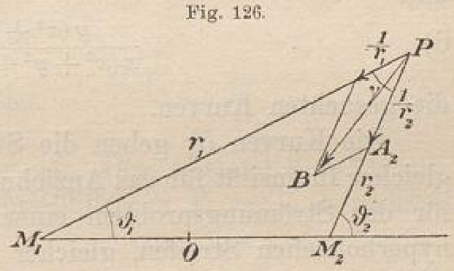


d. h. gleich der mittleren Proportionale zwischen $OM = 1$ und OC ist. Dort ist gezeigt, daſs dadurch die quadratische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar in die quadratische Einteilung durch Hyperbelbüschel und konfokale Lemniskatenschar erzielt wird. Der Beweis möge dort nachgesehen werden. Durch die in die Niveaulinien fallenden Quadratseiten gehen sekundlich gleiche Mengen von Elektrizität. An jeder Stelle der Fig. 125 sind die Abstände der Niveaulinien gleich den Querlinien der Kanäle. Die Figur giebt zugleich die Niveauflächen für das Anziehungsproblem zweier paralleler homogen mit Masse belegter unbegrenzter Geraden, wobei die Dichtigkeiten für beide übereinstimmen.

165) **Aufgabe.** Für einen Punkt einer der lemniskatischen Kurven die Normale, für das eben besprochene Anziehungsproblem die Resultante nach Gröſse und Richtung zu konstruieren.

Auflösung. Man könnte die bekannte Tangentenkonstruktion für die betreffende gleichseitige Hyperbel zu Hilfe nehmen. Dies soll hier aber nicht geschehen, vielmehr soll die Mechanik herangezogen werden. Nach Nr. 112 übt die Masse 1 in M_1 auf P die Anziehung $\frac{1}{r_1} = PA_1$ aus, die Masse 1 in M_2 die Anziehung $\frac{1}{r_2} = PA_2$. Diese Strecken sind leicht zu konstruieren (mit Hilfe der Proportion $r_1 : 1 = 1 : x$).

Fig. 126.



Die Resultante PB in Fig. 126 muſs senkrecht auf der Niveaulinie stehen, so daſs die Richtung der Normalen gefunden ist. (Darin liegt ein leicht auszusprechender geometrischer Satz für die Hyperbeln und Lemniskaten.) Zugleich ist für das Anziehungsproblem die Länge der Resultante gefunden. Sie folgt aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\cos\gamma}{r_1 r_2} = \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4r^2}{r_1^2 r_2^2}$$

als

3) $$p = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wobei r die Gerade OP ist.

Die Richtung der Resultante läſst sich mittels der Zerlegung der Einzelkräfte nach der senkrechten und wagerechten Richtung bequem ermitteln. Die Neigung α gegen die X-Achse ergiebt sich, wenn M_1 und M_2 als die Punkte $x = \pm 1$ der X-Achse betrachtet werden, aus