# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

165) Konstruktion für die Normale der Lemniskate; die Resultate des Problems

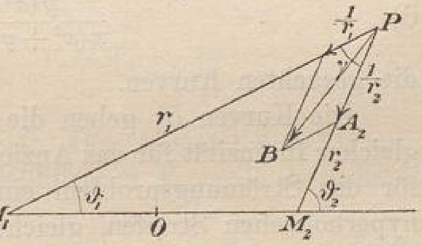
urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

d. h. gleich der mittleren Proportionale zwischen $OM = 1$ und $OC$ ist. Dort ist gezeigt, daſs dadurch die quadratische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar in die quadratische Einteilung durch Hyperbelbüschel und konfokale Lemniskatenschar erzielt wird. Der Beweis möge dort nachgesehen werden. Durch die in die Niveaulinien fallenden Quadratseiten gehen sekundlich gleiche Mengen von Elektrizität. An jeder Stelle der Fig. 125 sind die Abstände der Niveaulinien gleich den Querlinien der Kanäle. Die Figur giebt zugleich die Niveauflächen für das Anziehungsproblem zweier paralleler homogen mit Masse belegter unbegrenzter Geraden, wobei die Dichtigkeiten für beide übereinstimmen.

165) **Aufgabe.** Für einen Punkt einer der lemniskatischen Kurven die Normale, für das eben besprochene Anziehungsproblem die Resultante nach Gröſse und Richtung zu konstruieren.

**Auflösung.** Man könnte die bekannte Tangentenkonstruktion für die betreffende gleichseitige Hyperbel zu Hilfe nehmen. Dies soll hier aber nicht geschehen, vielmehr soll die Mechanik herangezogen werden. Nach Nr. 112 übt die Masse 1 in $M_1$ auf $P$ die Anziehung $\frac{1}{r_1} = PA_1$ aus, die Masse 1 in $M_2$ die Anziehung $\frac{1}{r_2} = PA_2$. Diese Strecken sind leicht zu konstruieren (mit Hilfe der Proportion $r_1 : 1 = 1 : x$). Die Resultante $PB$ in Fig. 126 muſs senkrecht auf der Niveaulinie stehen, so daſs die Richtung der Normalen gefunden ist. (Darin liegt ein leicht auszusprechender geometrischer Satz für die Hyperbeln und Lemniskaten.) Zugleich ist für das Anziehungsproblem die Länge der Resultante gefunden. Sie folgt aus

Fig. 126.




$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\cos\gamma}{r_1 r_2} = \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4 r^2}{r_1^2 r_2^2}$$

als

$$3) \qquad p = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wobei $r$ die Gerade $OP$ ist.

Die Richtung der Resultante läſst sich mittels der Zerlegung der Einzelkräfte nach der senkrechten und wagerechten Richtung bequem ermitteln. Die Neigung $\alpha$ gegen die $X$-Achse ergiebt sich, wenn $M_1$ und $M_2$ als die Punkte $x = \pm 1$ der $X$-Achse betrachtet werden, aus

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2}{\frac{1}{r_1}\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\cos\vartheta_2} = \frac{\frac{r_1\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} + \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y\left(r_2^2 + r_1^2\right)}{x\left(r_2^2 + r_1^2\right) + \left(r_2^2 - r_1^2\right)},$$

oder, wenn man für $r_2^2$ und $r_1^2$ die Werte $(x-1)^2 + y^2$ bezw. $(x+1)^2 + y^2$ einsetzt,

4) $$\tan\alpha = \frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2xy}.$$

166) Linien gleicher Stromdichte und gleicher Stromrichtung für dieses Problem. Setzt man die Ausdrücke für $p$ und $\tan\alpha$ gleich konstanten Gröfsen, so erhält man in

5) $$\frac{2r}{r_1 r_2} = c$$

und

6) $$\frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2xy} = c$$

die gesuchten Kurven.

Die Kurven 5) geben die Stellen gleichen Potentialgefälles und gleicher Intensität für das Anziehungsproblem, gleicher Geschwindigkeit für das Strömungsproblem einer inkompressiblen Flüssigkeit in den hyperbolischen Streifen, gleicher Stromdichte für die stationäre Elektrizitäts- bezw. Wärmeströmung. Sie passieren Quadrate von gleicher Gröfse in der quadratischen Einteilung.

Die Kurven 6) verbinden die Punkte gleicher Stromrichtung bezw. gleicher Anziehungsrichtung miteinander. [Beiläufig sei bemerkt, dafs ihre Gleichung sich auf $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$ zurückführen läfst, wo $\vartheta$ die Neigung des Vektors $OP$ ist, und dafs sie die Orthogonalschar zu den Kurven 5 geben.] Sie werden konstruiert, indem man in das System der Lemniskaten oder Hyperbeln eine Parallelenschar legt und die Berührungspunkte verbindet.

167) Die Diagrammfläche des Problems. Denkt man sich auf der Ebene der Lemniskaten und Hyperbeln in jedem Punkte das Lot $z = \lg(r_1 r_2) = \lg r_1 + \lg r_2$ errichtet, so erhält man die Diagrammfläche des Potentials. Die Projektionen der Niveaulinien und Steilungslinien sind die der Lemniskaten und Hyperbeln; die der Linien gleicher Steilheit (gleichen Gefälles) sind die Kurven 5), die der gleichen