Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

167) Die Diagrammfläche des Problems

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2}{\frac{1}{r_1}\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\cos\vartheta_2} = \frac{\frac{r_1\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} + \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y\left(r_2^2 + r_1^2\right)}{x\left(r_2^2 + r_1^2\right) + \left(r_2^2 - r_1^2\right)},$$

oder, wenn man für r_2^2 und r_1^2 die Werte $(x-1)^2 + y^2$ bezw. $(x+1)^2 + y^2$ einsetzt,

4) $$\tan\alpha = \frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2xy}.$$

166) Linien gleicher Stromdichte und gleicher Stromrichtung für dieses Problem. Setzt man die Ausdrücke für p und $\tan\alpha$ gleich konstanten Gröſsen, so erhält man in

5) $$\frac{2r}{r_1 r_2} = c$$

und

6) $$\frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2xy} = c$$

die gesuchten Kurven.

Die Kurven 5) geben die Stellen gleichen Potentialgefälles und gleicher Intensität für das Anziehungsproblem, gleicher Geschwindigkeit für das Strömungsproblem einer inkompressiblen Flüssigkeit in den hyperbolischen Streifen, gleicher Stromdichte für die stationäre Elektrizitäts- bezw. Wärmeströmung. Sie passieren Quadrate von gleicher Gröſse in der quadratischen Einteilung.

Die Kurven 6) verbinden die Punkte gleicher Stromrichtung bezw. gleicher Anziehungsrichtung miteinander. [Beiläufig sei bemerkt, daſs ihre Gleichung sich auf $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$ zurückführen läſst, wo ϑ die Neigung des Vektors OP ist, und daſs sie die Orthogonalschar zu den Kurven 5 geben.] Sie werden konstruiert, indem man in das System der Lemniskaten oder Hyperbeln eine Parallelenschar legt und die Berührungspunkte verbindet.

167) Die Diagrammfläche des Problems. Denkt man sich auf der Ebene der Lemniskaten und Hyperbeln in jedem Punkte das Lot $z = \lg(r_1 r_2) = \lg r_1 + \lg r_2$ errichtet, so erhält man die Diagrammfläche des Potentials. Die Projektionen der Niveaulinien und Steilungslinien sind die der Lemniskaten und Hyperbeln; die der Linien gleicher Steilheit (gleichen Gefälles) sind die Kurven 5), die der gleichen

Richtung der Projektion sind die Kurven 6). Folgen die Höhen z arithmetisch aufeinander, so durchschneiden die Kurven 5) die Stellen gleichen Abstandes w der Lemniskaten.

168) Das elektrische Strömungsproblem. Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\varkappa \lg (r_1 r_2), \quad \delta = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda \varkappa, \quad \varkappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo E die sekundlich in jedem der Punkte M_1 und M_2 einströmende Elektrizitätsmenge ist.

Sind r_1 und r_2 bezw. ϱ_1 und ϱ_2 die Abstände zweier benachbarter Punkte einer Stromlinie, deren Abstand gleich w ist, so folgt aus der Gefällgleichung

$$G = \tan \alpha = \varkappa \frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w}$$

und der Geschwindigkeitsgleichung $v = \lambda \tan \alpha$ für die inkompressible Flüssigkeit, da zugleich

$$v = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda \varkappa$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{V_2 - V_1}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}.$$

wo r der von M ausgehende Vektor ist. Der Abstand der Niveaulinien für eine gegebene kleine Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ berechnet sich also für jede Stelle als

$$w = (V_2 - V_1) \frac{r_1 r_2}{2r}.$$

Dadurch sind die Quadratseiten für gegebene kleine Potentialdifferenz berechnet. Das Problem kann damit als erledigt betrachtet werden.

169) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 strömen sekundlich gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten ein. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen.

Auflösung. Nach obigem erhalten die Niveaulinien die Gleichung

$$1) \qquad \lg r_1 - \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad \lg \frac{r_1}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^c,$$

die Stromlinien die Gleichung

$$2) \qquad \vartheta_2 - \vartheta_1 = c.$$

Der Faktor $\varkappa$ ist als unwesentlich weggelassen. Die Schar 1) ist eine Kreisschar, die Schar 2) ein Kreisbüschel durch M_1 und M_2, beide