Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

169) Dasselbe Problem für entgegengesetzte Ladungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Richtung der Projektion sind die Kurven 6). Folgen die Höhen z arithmetisch aufeinander, so durchschneiden die Kurven 5) die Stellen gleichen Abstandes w der Lemniskaten.

168) Das elektrische Strömungsproblem. Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\varkappa \lg(r_1 r_2), \quad \delta = \frac{2r}{r_1 r_2}\lambda\varkappa, \quad \varkappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo E die sekundlich in jedem der Punkte M_1 und M_2 einströmende Elektrizitätsmenge ist.

Sind r_1 und r_2 bezw. ϱ_1 und ϱ_2 die Abstände zweier benachbarter Punkte einer Stromlinie, deren Abstand gleich w ist, so folgt aus der Gefällgleichung

$$G = \tan\alpha = \varkappa \frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w}$$

und der Geschwindigkeitsgleichung $v = \lambda \tan\alpha$ für die inkompressible Flüssigkeit, da zugleich

$$v = \frac{2r}{r_1 r_2}\lambda\varkappa$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{V_2 - V_1}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wo r der von M ausgehende Vektor ist. Der Abstand der Niveaulinien für eine gegebene kleine Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ berechnet sich also für jede Stelle als

$$w = (V_2 - V_1)\frac{r_1 r_2}{2r}.$$

Dadurch sind die Quadratseiten für gegebene kleine Potentialdifferenz berechnet. Das Problem kann damit als erledigt betrachtet werden.

169) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 strömen sekundlich gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten ein. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen.

Auflösung. Nach obigem erhalten die Niveaulinien die Gleichung

1) $$\lg r_1 - \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad \lg\frac{r_1}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^c,$$

die Stromlinien die Gleichung

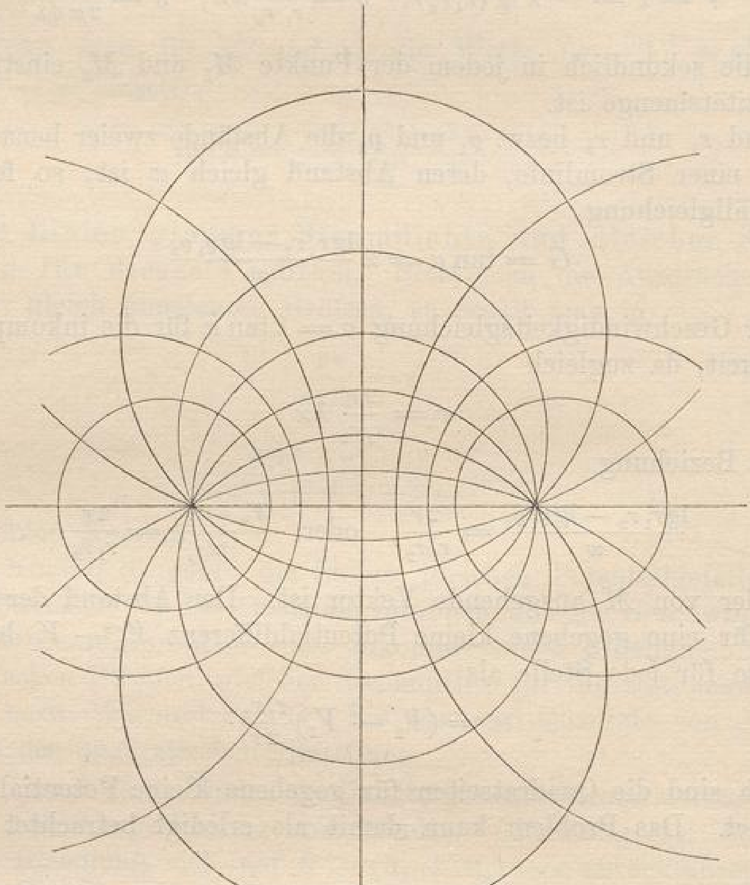
2) $$\vartheta_2 - \vartheta_1 = c.$$

Der Faktor $\varkappa$ ist als unwesentlich weggelassen. Die Schar 1) ist eine Kreisschar, die Schar 2) ein Kreisbüschel durch M_1 und M_2, beide

Scharen durchsetzen einander rechtwinklig. Nimmt c in beiden Gleichungen Werte an, die derselben arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung in kleine Quadrate.

Aus Figur 127 geht hervor, dafs c für jeden Büschelkreis den konstanten Peripheriewinkel über $M_1 M_2$ bedeutet, der gleich dem

Fig. 127.



Winkel ist, unter dem die X-Achse geschnitten wird. Demnach bilden die Tangenten der Büschelkreise in M_1 und M_2 reguläre Strahlenbüschel.

Konstruktiv kann man die Niveau- und Kraftlinien auf verschiedene Arten erhalten. Zunächst kann man beginnen wie beim vorigen Problem, nur hat man die andere Gruppe von Diagonalen in das Vierecksnetz einzuzeichnen. Eine zweite Art ist folgende: Man denke sich das Quadratnetz der Strahlen und koncentrischen Kreise gezeichnet, mache einen beliebigen Punkt der Ebene zum Inversionscentrum (Abbildung $Z=\frac{1}{z}$), eine beliebige Länge wähle man als Einheit. Nach dem Method. Lehrbuch II Kap. IX gehen dabei die Kreise und die Strahlen in ein Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar über, und da die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt bleibt, entsteht die quadratische Einteilung.

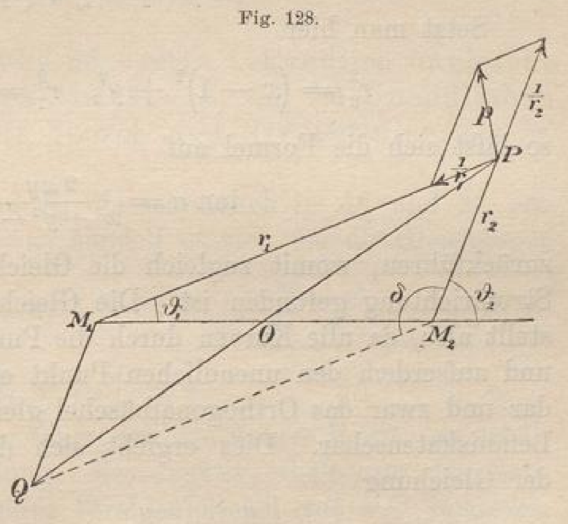
Selbständig läſst sich das Büschel leicht konstruieren, sobald man weiſs, daſs die Tangenten in den Büschelpunkten unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Nimmt man neben der Symmetrielinie einen der Orthogonalkreise willkürlich an, so lassen sich die anderen mit Hilfe der Tangenten in den Schnittpunkten mit dem Büschel, welche Inversionscentren geben, leicht ableiten.

Der Übergang vom Strahlenbüschel und den koncentrischen Kreisen zum Kreisbüschel und der orthogonalen Kreisschar giebt den Zusammenhang der Polarkarte mit den Karten der östlichen und westlichen Halbkugel nach der stereographischen Projektion von Hipparch-Ptolemäus. [Nimmt man dazu die Quadrateinteilung der Ebene durch Parallelenscharen, so erhält man den Zusammenhang mit der Merkatorkarte, der durch die Abbildung $Z=\lg z$ gegeben wird.]

Zugleich ist das Newtonsche Anziehungs-Abstoſsungsproblem gelöst für zwei unbegrenzte Gerade, von denen die eine mit anziehender, die andere mit abstoſsender Masse homogen belegt ist.

170) **Aufgabe.** Die Resultante des letzteren Problems nach Gröſse und Richtung zu konstruieren und zu berechnen, ebenso die Linien gleicher Stromdichte und Stromrichtung.

Fig. 128.



Auflösung. Sieht man von der Konstanten ab, so handelt es sich für den Punkt P um die anziehende Kraft $\frac{1}{r_1}$ und um die abstoſsende Kraft $\frac{1}{r_2}$, die beide leicht zu konstruieren sind. Die Resultante ergiebt sich nach Fig. 128 durch Zusammensetzung.