Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

170) Konstruktion der Resultante für das Problem.

denke sich das Quadratnetz der Strahlen und koncentrischen Kreise gezeichnet, mache einen beliebigen Punkt der Ebene zum Inversionscentrum (Abbildung $Z = \frac{1}{z}$), eine beliebige Länge wähle man als Einheit. Nach dem Method. Lehrbuch II Kap. IX gehen dabei die Kreise und die Strahlen in ein Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar über, und da die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt bleibt, entsteht die quadratische Einteilung.

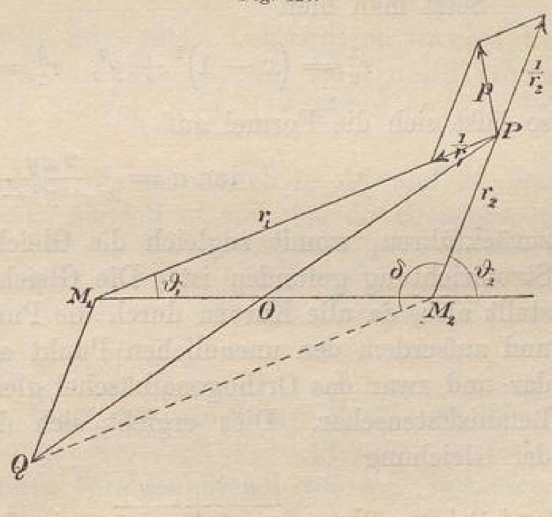
Selbständig läfst sich das Büschel leicht konstruieren, sobald man weifs, dafs die Tangenten in den Büschelpunkten unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Nimmt man neben der Symmetrielinie einen der Orthogonalkreise willkürlich an, so lassen sich die anderen mit Hilfe der Tangenten in den Schnittpunkten mit dem Büschel, welche Inversionscentren geben, leicht ableiten.

Der Übergang vom Strahlenbüschel und den koncentrischen Kreisen zum Kreisbüschel und der orthogonalen Kreisschar giebt den Zusammenhang der Polarkarte mit den Karten der östlichen und westlichen Halbkugel nach der stereographischen Projektion von Hipparch-Ptolemäus. [Nimmt man dazu die Quadrateinteilung der Ebene durch Parallelenscharen, so erhält man den Zusammenhang mit der Merkatorkarte, der durch die Abbildung $Z = \lg z$ gegeben wird.]

Zugleich ist das Newtonsche Anziehungs-Abstofsungsproblem gelöst für zwei unbegrenzte Gerade, von denen die eine mit anziehender, die andere mit abstofsender Masse homogen belegt ist.

170) **Aufgabe.** Die Resultante des letzteren Problems nach Gröfse und Richtung zu konstruieren und zu berechnen, ebenso die Linien gleicher Stromdichte und Stromrichtung.

Fig. 128.



Auflösung. Sieht man von der Konstanten ab, so handelt es sich für den Punkt P um die anziehende Kraft $\frac{1}{r_1}$ und um die abstofsende Kraft $\frac{1}{r_2}$, die beide leicht zu konstruieren sind. Die Resultante ergiebt sich nach Fig. 128 durch Zusammensetzung.

Die Gröfse der Resultante ergiebt sich, wenn $MM_2 = 1$ gesetzt wird, als

$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1 r_2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\delta}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\overline{M_1 M_2^2}}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4}{r_1^2 r_2^2},$$

so dafs

$$p = \frac{2}{r_1 r_2}$$

ist. Die Linien gleicher Stromdichte haben also jetzt die Gleichung

$$\frac{2}{r_1 r_2} = \varkappa$$

oder

$$r_1 r_2 = \frac{2}{\varkappa} = c,$$

d. h. sie bilden ein System konfokaler Lemniskaten.

Die Richtung der Resultante ergiebt sich nach dem früheren aus

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2}{\frac{1}{r_1}\cos\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\cos\vartheta_2} = \frac{\frac{r_1 \sin\vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} - \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{x\left(r_2^2 - r_1^2\right) + \left(r_2^2 + r_1^2\right)}.$$

Setzt man hier

$$r_2^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x+1)^2 + y^2,$$

so läfst sich die Formel auf

$$\tan\alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1} = c$$

zurückführen, womit zugleich die Gleichung für die Linien gleicher Stromrichtung gefunden ist. Die Gleichung ist vom zweiten Grade, stellt also, da alle Kurven durch die Punkte ± 1 der X-Achse gehen und aufserdem den unendlichen Punkt erreichen, ein Hyperbelbüschel dar und zwar das Orthogonalbüschel gleichwertiger Hyperbeln für die Lemniskatenschar. Dies ergiebt sich durch folgende Umschreibung der Gleichung

$$\frac{[(x+1)+(x-1)]\,y}{(x+1)(x-1) - y^2} = \frac{\frac{y}{x-1} + \frac{y}{x+1}}{1 - \frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}} = \frac{\tan\vartheta_1 + \tan\vartheta_2}{1 - \tan\vartheta_1 \tan\vartheta_2} = \tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$$

oder auch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = c_1,$$

was nach Nr. 163 die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist.

Zieht man also in einem Kreisbüschel parallele Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Die Orthogonalkurven sind Lemniskaten 2^{ter} Ordnung, und jede von ihnen durchschneidet bei der Quadrateinteilung der Ebene durch Kreisbüschel und Kreisschar eine Reihe gleich grofser Quadrate.

Errichtet man auf der Ebene in jedem Punkte ein Lot

$$\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \lg r_1 - \lg r_2,$$

so erhält man die Diagrammfläche des Problems, über die sich ähnliche Betrachtungen wie über die vorige anstellen lassen.

Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\varkappa \lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right), \quad v = \frac{2}{r_1 r_2}\lambda\varkappa, \quad \varkappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo E die aus M_1 sekundlich hervorquellende Elektrizitätsmenge bedeutet.

Dieses Problem ist das erste, an dem Kirchhoff seine bahnbrechenden Untersuchungen über die stationäre Strömung in ebenen Platten theoretisch und experimentell prüfend durchgeführt hat. (Vgl. Poggendorfs Annalen, Bd. 64 u. 67 und die Vorlesungen Kirchhoffs über Elektrizität und Magnetismus Seite 135.)

171) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 treten sekundlich ungleiche Mengen gleichartiger Elektrizität ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien u. s. w. sind zu untersuchen.

Auflösung. Sind E_1 und E_2 die sekundlich in M_1 und M_2 eintretenden Elektrizitätsmengen, so handelt es sich um die Gleichungen

1) $$E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} = c^c$$

und

2) $$E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 = c.$$

Folgen die Werte von c einer arithmetischen Reihe, so erhält man die quadratische Einteilung. Konstruktiv erhält man das Netz, indem man in M_1 ein reguläres Strahlenbüschel von nE_1 Sektoren, in M_2 ein solches von nE_2 Sektoren zeichnet, die eine Gröfse von Diagonalkurven des Netzes giebt die Stromlinien 2), deren Gleichung daraus sofort als richtig erhellt. Dasselbe macht man mit den