



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

171) Zweipunktproblem für ungleiche positive Menge

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

oder auch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = c_1,$$

was nach Nr. 163 die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist.

Zieht man also in einem Kreisbüschel parallele Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Die Orthogonalkurven sind Lemniskaten 2<sup>ter</sup> Ordnung, und jede von ihnen durchschneidet bei der Quadranteilung der Ebene durch Kreisbüschel und Kreisschar eine Reihe gleich großer Quadrate.

Errichtet man auf der Ebene in jedem Punkte ein Lot

$$\lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right) = \lg r_1 - \lg r_2,$$

so erhält man die Diagrammfläche des Problems, über die sich ähnliche Betrachtungen wie über die vorige anstellen lassen.

Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -x \lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right), \quad v = \frac{2}{r_1 r_2} \lambda x, \quad x = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo  $E$  die aus  $M_1$  sekundlich hervorquellende Elektrizitätsmenge bedeutet.

Dieses Problem ist das erste, an dem Kirchhoff seine bahnbrechenden Untersuchungen über die stationäre Strömung in ebenen Platten theoretisch und experimentell prüfend durchgeführt hat. (Vgl. Poggendorfs Annalen, Bd. 64 u. 67 und die Vorlesungen Kirchhoffs über Elektrizität und Magnetismus Seite 135.)

171) **Aufgabe.** In  $M_1$  und  $M_2$  treten sekundlich ungleiche Mengen gleichartiger Elektrizität ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien u. s. w. sind zu untersuchen.

**Auflösung.** Sind  $E_1$  und  $E_2$  die sekundlich in  $M_1$  und  $M_2$  eintretenden Elektrizitätsmengen, so handelt es sich um die Gleichungen

$$1) \quad E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} = c^c$$

und

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 = c.$$

Folgen die Werte von  $c$  einer arithmetischen Reihe, so erhält man die quadratische Einteilung. Konstruktiv erhält man das Netz, indem man in  $M_1$  ein reguläres Strahlenbüschel von  $nE_1$  Sektoren, in  $M_2$  ein solches von  $nE_2$  Sektoren zeichnet, die eine Größe von Diagonalkurven des Netzes giebt die Stromlinien 2), deren Gleichung daraus sofort als richtig erhellt. Dasselbe macht man mit den

quadratisch teilenden konzentrischen Kreisen der beiden Büschel, was nach Form und Gleichung auf die Kurven 1) führt. Über die Diagrammfläche, ebenso über die Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung lassen sich dieselben Betrachtungen wie vorher anstellen, nur werden die Resultate weniger einfach. Die Zeichnung für den Fall  $E_1 : E_2 = 2 : 1$  erinnert an Fig. 72.

Die Stromlinien haben Asymptoten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen und durch den Schwerpunkt der „Massen“  $E_1$  und  $E_2$  gehen. Zwei dieser Asymptoten teilen den Winkel  $M_2 M M_1$  im Verhältnis  $E_2 : E_1$ . Die zugehörigen Stromlinien grenzen die beiden Ausströmungsbereiche voneinander ab. Zu den Niveaulinien gehört ein unendlich großer Kreis um den Schwerpunkt. [Auf die Transformation, welche das Strahlenbüschel und die konzentrische Kreisschar direkt in die vorliegenden Kurvenscharen verwandelt, kann hier nicht eingegangen werden. Dazu vergleiche man Kapitel X der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.]

172) **Aufgabe.** In  $M_1$  ströme die Elektrizitätsmenge  $E_1$  ein, der Teil  $E_2$  werde in  $M_2$  abgeleitet, der Rest fließe ins Unendliche ab. Die Niveau- und Stromlinien sind zu untersuchen.

**Auflösung.** Konstruktiv beginnt man wie vorher, nur nimmt man die andere Diagonalengruppe. Dies und die Potentialüberlegung führt auf die Niveaulinien

$$1) \quad E_1 \lg r_1 - E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{-E_2} = e^c.$$

$$2) \quad E_1 \vartheta_1 - E_2 \vartheta_2 = c.$$

Die Zeichnung für  $E_1 : E_2 = 2 : 1$  erinnert an Fig. 76. Die Arme der sich selbst schneidenden Kurven schneiden einander rechtwinklig.

173) **Aufgabe.** In drei beliebig liegenden Punkten der Ebene werde Elektrizität in den sekundlichen Mengen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  eingeführt, im Unendlichen abgeleitet. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

**Auflösung.** Man bilde zunächst die Stromlinien für  $E_1$  und  $E_2$  und zwar soll die Zahl der Streifen für  $M_1$  gleich  $nE_1$ , für  $M_2$  gleich  $nE_2$  sein. Darauf bilde man das regelrechte Strahlenbüschel für  $M_3$  mit  $nE_3$  Streifen. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Maschennetzes giebt die gesuchten Stromlinien. Darauf bilde man für  $M_1$  und  $M_2$  die quadratisch einteilenden Niveaulinien, für  $M_3$  die quadratisch einteilenden konzentrischen Kreise und verfare damit ebenso.