Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

179) Methode der konformen Abbildung

ist, dafs jede Station nicht die ganze von ihr ausgehende Elektrizität zurück erhält, sonderen nur einen Teil davon, wogegen sie den Rest anderswoher erhält.

178) Eine allgemeine Methode zur Herstellung isothermischer Einteilungen. Aus obigem ergiebt sich ganz allgemein folgendes: Hat man ein Strömungsnetz mit quadratischer Einteilung in der Ebene, und zeichnet man ein zweites quadratisches ein, so geben die beiden Gruppen von Diagonalkurven des Stromliniennetzes die Stromlinien zweier neuen Probleme, von denen das eine gewissermafsen durch Addition, das andere durch Subtraktion aus den beiden gegebenen hervorgeht. Dasselbe gilt von den Niveaulinien der beiden Probleme, deren Diagonalkurven auf die Niveaulinien der beiden neuen Probleme führen. Dabei mufs jedoch angenommen werden, dafs die Massenbelegungen der Linien bezw. Flächen unverändert festgehalten werden. Elektrizitäten z. B. würden bei gegenseitiger Annäherung sofort durch Influenz in Verschiebungen geraten. Dann aber würden die gefundenen Linien nicht mehr das Stromnetz des neuen Problems, sondern das eines gewissen anderen geben. Bei Punktproblemen tritt die genannte Störung nicht ein.

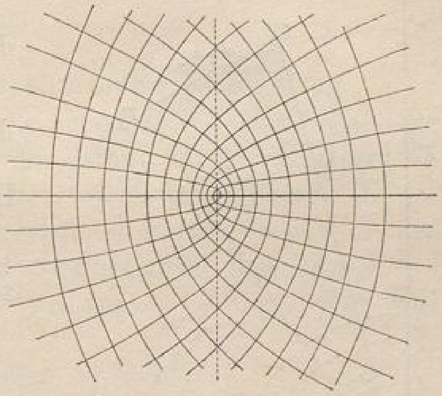
Ein besonderer Fall liegt darin, dafs die Diagonalkurven einer quadratischen Einteilung stets auf die Strom- und Niveaulinien eines anderen Strömungsproblems führen und zwar ebenfalls in quadratischer Einteilung.

So kann man synthetisch aus bekannten Problemen neue in beliebiger Zahl ableiten, ohne die Hilfsmittel der höheren Analysis zu benutzen.

179) Eine zweite Methode ist die der konformen Abbildung, d. h. der in den kleinsten Teilen ähnlichen Abbildung. Ohne auf den analytischen Charakter einzugehen, bemerken wir folgendes. Gelingt es, durch irgend eine Transformation aus einer bekannten quadratischen Einteilung wiederum eine quadratische zu erhalten, so hat man ein neues Stromnetz. Dies geschieht z. B. bei der Inversion oder Transformation mittels reciproker Radien, $Z = \frac{1}{z}$, bei der in Band I erörterten lemniskatischen Abbildung $Z = \sqrt{z}$, bei der in Nr. 115 behandelten logarithmischen Abbildung. Die Inversion verwandelt die Parallelenschar in ein System sich berührender Kreise und die orthogonale Kreisschar, das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in das Kreisbüschel nebst orthogonaler

Kreisschar. Die lemniskatische Abbildung verwandelt das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in das Büschel gleichseitiger Hyperbeln nebst konfokaler Lemniskatenschar, das Kreisbüschel nebst orthogonaler Kreisschar in das in Fig. 129 dargestellte Lemniskatenbüschel nebst orthogonaler Lemniskatenschar, die Parallelenscharen in Scharen gleichseitiger Hyperbeln.

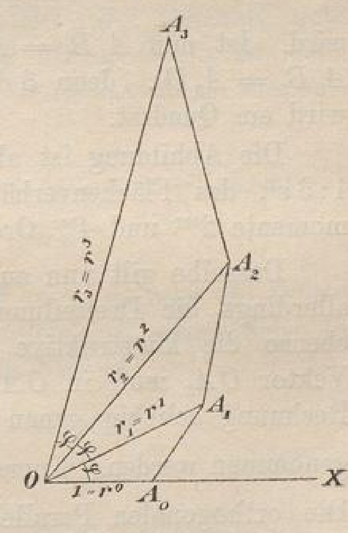
Fig. 131.



Die Abbildung $Z = z^2$, d. h. die Umkehrung der lemniskatischen Abbildung verwandelt die Parallelenscharen in ein System konfokaler Parabeln, das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in ein Büschel von Parabeln nebst kardioidischer Schar. Man kann diese Transformation als die kardioidische Abbildung bezeichnen. (Vergl. Ing.-Math. Band I, Abschnitt VI.)

180) Die Abbildung $Z = z^3$ ist entsprechend zu behandeln. Ist $OA = 1$ und $OA_1 = r_1$ eine beliebige Strecke, so vollende man Dreieck OAA_1 und setze darauf ein ähnliches OA_1A_2, darauf wiederum ein ähnliches OA_2A_3. Dann ist

Fig. 132.



$$OA_2 = r_1^2,\ OA_3 = r_1^3,$$

zugleich ist

$$\sphericalangle AOA_3 = 3 \cdot \sphericalangle AOA_1.$$

Dies entspricht der Moivreschen Formel

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3$$
$$= r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Man nennt die Strecke OA_3 (Strecke ist die nach Länge und Richtung bestimmte Gerade) die dritte Potenz der Strecke OA_1. So kann man zu jedem Punkte A_1 den zugehörigen A_3 finden. Koncentrische Kreise um O gehen dabei wieder in solche über, Strahlen durch O wieder in Strahlen durch O. Kurven $f(R, \Phi) = 0$ gehen über in Kurven $f(r^n, n\varphi) = 0$, Kurven $f\left(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}\right) = 0$ in Kurven $f(r, \varphi) = 0$.